复变函数笔要点速览

邓嘉驹

2023 年 2 月 25 日

目录

1 复数和平面点集 **4**
1.1 复数 4
1.1.1 复数的四则运算 4
1.1.2 共轭复数 4
1.1.3 复数的几何表示、模与辐角 4
1.1.4 复数的乘方和开方 4
1.1.5 复数序列的极限、无穷远点 5
1.2 平面点集 5
1.2.1 区域与曲线 5

2 复变数函数 **6**
2.1 复变数函数的概念 6
2.2 函数极限和连续性 6
2.3 导数和解析函数的概念 6
2.4 柯西-黎曼方程 6
2.5 初等函数 6
2.5.1 幂函数 7
2.5.2 根式函数 7
2.5.3 指数函数 7
2.5.4 对数函数 7
2.5.5 三角函数 8
2.5.6 双曲函数 8
2.5.7 一般幂函数 8

3 解析函数的积分表示 **9**
3.1 复变函数的积分 9
3.2 柯西积分定理 9
3.3 原函数 10
3.4 柯西积分公式 10

3.5 解析函数的性质 10

4 调和函数 11

4.1 解析函数与调和函数的关系 11

4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题 11

5 解析函数的级数展开 12

5.1 复级数的基本性质 12

5.1.1 复数项级数 12

5.1.2 复变函数项级数 12

5.2 幂级数 13

5.3 解析函数的泰勒展开 13

5.4 罗朗级数 14

5.5 解析函数的孤立奇点 15

6 留数及其应用 16

6.1 留数定理 16

6.2 积分计算 16

6.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 型积分 16

6.2.2 有理函数的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 16

6.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin mx\,\mathrm{d}x\,, m>0$ 型积分 . . 17

6.2.4 杂例 17

6.2.5 多值函数的积分 17

6.3 辐角原理 18

7 解析开拓 19

7.1 唯一性定理和解析开拓的概念 19

8 保形变换及其应用 20

8.1 导数的几何意义 20

8.2 保形变换的概念 20

8.3 分式线性变换 20

8.4 初等函数的映照 21

8.4.1 变换 $w=z^n$ 和 $w=\sqrt[n]{z},\ n\geqslant 2$ 是自然数 21

8.4.2 变换 $w=\mathrm{e}^z$ 和 $w=\mathrm{Ln}z$ 21

9 拉氏变换 22

9.1 拉氏变换的定义 22

9.2 拉式变换的基本性质 22

9.3 由像函数求本函数 23

9.3.1 部分分式法 23
9.3.2 拉氏变换的反演公式 23
9.3.3 其他方法 23

1 复数和平面点集

1.1 复数

1.1.1 复数的四则运算

1. 加减法：$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$.
2. 乘法：$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
3. 除法：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.

1.1.2 共轭复数

性质：

1. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z,\ z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$.
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,\ \dfrac{\overline{z_1}}{z_2} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
4. $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$.

1.1.3 复数的几何表示、模与辐角

1. $z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \mathrm{Arg}z = \arctan\dfrac{y}{x}$，$\arg z$ 为辐角主值.
2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$.
3. Euler 公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
4. 不等关系：$|x|, |y| \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|$.

注 注意方程 $\arg(z - a) = \mathrm{const}$ 在复平面内表示的射线不包含点 a.

1.1.4 复数的乘方和开方

1. 乘方：$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
2. de Moive 公式：$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.
3. 开方：$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

1.1.5 复数序列的极限、无穷远点

1. 定义：设 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 是一个复数序列，z_0 是已知复数，若

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0,$$

则称复数 z_0 是复数列 $\{z_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 或 $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_9$ 的两种等价描述：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

(2) $z_0 \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$，$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Arg} z_n = \mathrm{Arg} z_0$.

1.2 平面点集

1.2.1 区域与曲线

1. 区域：具有连通性（D 中任意两点能用一条全在 D 中的折线相联）的开集D.
闭域 $\bar{D} = C + D$，其中 C 为 D 的边界.

2. Jordan 曲线：对于曲线 $z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，若 $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ 当 $t_1 \neq t_2$ 时，总有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，则 $z(t)$ 为 Jordan 曲线；若 $z(\alpha) = z(\beta)$，则 $z(t)$ 为 Jordan 闭曲线.

3. 若区域 D 内任一闭曲线所围成的区域均在 D 内，则 D 为单连通区域；否则为多连通区域.

2 复变数函数

2.1 复变数函数的概念

1. 定义：设复平面上有点集 E，对 $\forall z \in E$，若总能找到对应的复数 w，则称在 E 上定义了复变数函数 $w = f(z)$.
2. 多值函数：每个点 z 对应的 w 不止一个的函数.
3. 一一映照（双方单值映照）：$z_1 \neq z_2$ 时，$w_1 \neq w_2$.

2.2 函数极限和连续性

1. 极限：函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 > |z - z_0| < \delta \leqslant \rho$ 时，$|f(z) - w_0| < \varepsilon$，则称 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时以 w_0 为极限，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

2. $f(z)$ 在点 z_0 连续：$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
   等价描述：$u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续.

2.3 导数和解析函数的概念

1. 导数：若极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 存在，则称 $f(z)$ 在点 z 可导，记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$.
2. $f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|)$.
3. 解析：若 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内可微，则称 $f(z)$在点 z_0 解析；不解析的点称为奇点.

2.4 柯西-黎曼方程

1. 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可微的充要条件：

   (1) u, v 在点 (x, y) 可微.

   (2) u, v 在点 (x, y) 满足 C-R 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. 导数：$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} \overset{\text{C-R 方程}}{=\!=\!=} \cdots$.

2.5 初等函数

若 $w = f(z)$ 是区域 D 内的一一解析映照，则称 $f(z)$ 是 D 内的单叶函数，D 称为其单叶性区域.

2.5.1 幂函数

1. 常见：$w=z^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$.
2. 变换：角域 $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta\xrightarrow{w=z^n}$ 角域 $n\alpha\leqslant\arg w\leqslant n\beta$. 若 $\beta-\alpha\leqslant\dfrac{2\pi}{n}$ 则前一角域为 $w=f(z)$ 的单叶性区域[1].

2.5.2 根式函数

1. 常见：$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ (n\in\mathbb{N}^*,k=0,1,2,\cdots,n-1)$.
2. 支点：对某函数 $f(z)$ 而言，在点 $z=a$ 充分小邻域内取闭曲线 C，当 z 绕 C 一周而使 $f(z)$ 变化时，称 a 为 $f(z)$ 的支点.
3. 支割线：以 $w=\sqrt[n]{z}$ 为例，其支点为 $0,\infty$，则连接 0 与 ∞ 点的“线段”（实为射线）为支割线. 其中一个单值函数称为单值连续分支.
4. 导数：$\dfrac{\mathrm{d}w_k}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{n}z^{1/n-1}=\dfrac{w_k}{nz}$.

2.5.3 指数函数

1. 定义：初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=w,w(0)=1$ 的解.
2. 性质：
   (1) $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x\neq0$.
   (2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在.
   (3) e^z 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.
3. 变换：
   (1) 条形域 $a<\mathrm{Im}z<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$ 角域 $a<\arg w<b$.
   (2) 条形域 $a<\mathrm{Re}z<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$ 圆环域 $\mathrm{e}^a<|w|<\mathrm{e}^b$.

2.5.4 对数函数

1. 定义：$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$.

   注 记 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值.

2. 性质：$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$.

   注 注意，通常$\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z\neq2\mathrm{Ln}z$，原因是等号前两个 $\mathrm{Ln}z$ 的 k 值可能不同.

3. 变换：

[1] 保形变换中常先将角域旋转使 $\alpha=0$

(1) 角域 $a<\arg z<b \xrightarrow{w=\operatorname{Ln} z}$ 条形域 $2k\pi+a<\operatorname{Im} w<2k\pi+b\ (k\in\mathbb{Z})$, 其中 $b-a\leqslant 2\pi$.

(2) 圆环域 $0\leqslant a<|z|<b \xrightarrow{w=\operatorname{Ln} z}$ 条形域 $\ln a<w<\ln b$.

4. 导数: $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{z}$.

2.5.5 三角函数

1. 定义: $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$.

2. 性质:

(1) $\sin z,\cos z$ 以 2π 为周期.

(2) $\sin z=0$ 当且仅当 $z_m=m\pi\ (m\in\mathbb{Z})$, $\cos z=0$ 当且仅当 $z_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\ (n\in\mathbb{Z})$.

(3) $\sin z,\cos z$ 无界.

3. 导数: 同实数情形.

2.5.6 双曲函数

1. 定义: $\cosh z=\dfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2},\sinh z=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2},\tanh z=\dfrac{\sinh z}{\cosh z}$.

2. 性质:

(1) $\sinh z,\cosh z$ 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.

(2) $\cos(\mathrm{i}z)=\cosh z,\sin(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\sinh z$.

3. 导数: 同实数情形.

2.5.7 一般幂函数

1. 定义: 对 $\forall\alpha\in\mathbb{C}$, $w=z^{\alpha}\xlongequal{\Delta}\mathrm{e}^{\alpha\operatorname{Ln} z}=\mathrm{e}^{\alpha[\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)]}\ (k\in\mathbb{Z})$.

2. 特殊情形:

(1) $\alpha=n\in\mathbb{N}^*$ 时, z^n 为单值函数.

(2) $\alpha=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}\ (m,n\in\mathbb{N}^*)$ 时, $z^{m/n}$ 可分出 n 个单值连续分支.

(3) α 为无理数或一般复数[2]时, z^{α} 是无穷多值的.

[2]指 $\operatorname{Im} z\neq 0$

3 解析函数的积分表示

3.1 复变函数的积分

1. 定义：$\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \xlongequal{\Delta} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$，其中 $\lambda = \max\limits_{k}|\Delta z_k|$.

2. 两种形式：

   (1) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y).$

   (2) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f'(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$

3. 性质：

   (1) $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

   (2) $\displaystyle\int_{|z-a|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$

   (3) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s.$

   (4) 当 $\rho\in\mathbb{R}^+$ 充分小时，$f(z)$ 在圆弧 $C_\rho: z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 上连续，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，那么

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta-\alpha)k.$$

3.2 柯西积分定理

1. Cauchy 积分定理：设 D 是由闭路围成的单连通区域，$f(z)$ 在闭域 $C+D$ 内解析，则 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

2. 推论：若 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C 是自点 z_0 至点 z 的任一曲线，则积分值 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 仅依赖于起始点 z_0, z，不依赖路径 C 的选择.

3. 多连通区域的 Cauchy 定理：设 $f(z)$ 在闭路 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 围成的多连通域内解析，则 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$ 或

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

4. 对任意包含点 a 的复闭路 C，$\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$

3.3 原函数

1. 定义：若 $f(z)$ 是单连通域 D 内的解析函数，则对 $\forall z_0, z \in D$，$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ 在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$.
2. Newton-Leibniz 公式：$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z) - F(z_0)$.
3. 若 D 为多连通区域，此变上限积分是一个多值函数，如

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \ln z + 2k\pi\mathrm{i} = \mathrm{Ln}z.$$

3.4 柯西积分公式

1. Cauchy 积分公式：设 $f(z)$ 在闭路 C 及其所围成的区域 D 内解析，则对 $\forall z \in D$，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

   进一步，此条件下 $f(z)$ 在 $C + D$ 内的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

3.5 解析函数的性质

1. 平均值公式：$f(z)$ 在闭圆 $|z - a| \leqslant R$ 内解析，则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int_{|z-a|=R} f(z)\,\mathrm{d}s$.
2. 最大模原理：$f(z)$ 在闭路 C 及其所围成的区域 D 内连续，在 D 内解析，且$f(z)$ 不为常数，那么 $|f(z)|$ 最大值只能在边界 C 上取到.
   若对 $\forall z \in D$，$f(z) \neq 0$，则 $|f(z)|$ 最小值也只能在边界 C 上取到.
3. Cauchy 不等式：$f(z)$ 在 D 内解析，D 内圆周 $C : |z - a| \leqslant R$，记 $M(R) = \max\limits_{z \in C} |f(z)|$，则

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M(R)}{R^n}.$$

4. Liouville 定理：如果整函数[3]在全平面有界，则 $f(z)$ 为常数.
5. 代数学基本定理：任何复系数多项式必有零点.
6. Morera 定理：$f(z)$ 在域 D 中连续，且对任意闭路 $C \in D$ 均有 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

[3]在有限复平面上解析的函数

4 调和函数

4.1 解析函数与调和函数的关系

1. 共轭调和函数：满足 C-R 方程的一对调和函数.
2. 共轭调和函数 u, v 的等值曲线族 $u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$ 在交点处正交.
3. 若已知 $u(x,y)$，则 $v(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y+v(x_0,y_0)$.
4. $\Delta u=\Delta v=\boldsymbol{\nabla} u\cdot\boldsymbol{\nabla} v=|\boldsymbol{\nabla} u|^2-|\boldsymbol{\nabla} v|^2=0$.

4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题

1. 平均值定理：$u(z)$ 是闭圆 $\bar{D}:|z-z_0|\leqslant R$ 内的调和函数，则 $u(z)=\dfrac{1}{2\pi R}\displaystyle\int_C u(z)\,\mathrm{d}s$，其中 C 为 $\bar{D}$ 的边界.
2. 极值原理：$u(z)$ 在有界域 D 内为调和函数，在 $C+D$ 内解析，且 $u(z)$ 不为常数，那么 $u(z)$ 在边界 C 上取到最值.
3. Poisson 积分公式：$u(z)$ 是闭圆 $\bar{D}:|z-z_0|\leqslant R$ 上的调和函数，则对 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ (r<R)$，有

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

   这说明若已知一闭圆内调和函数在圆周上的值，则函数在圆内的值被唯一确定.
4. $u_1(z), u_2(z)$ 在有界域 D 内调和，在有界闭域 $\bar{D}=C+D$ 上解析，若在 C 上满足 $|u_1(z)-u_2(z)|\leqslant\varepsilon$，则在 $\bar{D}$ 内也有 $|u_1(z)-u_2(z)|\leqslant\varepsilon$.
   应用：如稳定温度场（可证为调和场）外围测量温度误差不超过 ε，则内部温度测量误差也不超过 ε.

5 解析函数的级数展开

5.1 复级数的基本性质

5.1.1 复数项级数

1. 复数项无穷级数：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$.

2. 收敛：部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ 存在极限.

   等价描述：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ 均收敛.

3. Cauchy 收敛准则：对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N, p \in \mathbb{N}^*$ 时，满足

   $$|S_{n+p} - S_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

   收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

4. 绝对收敛：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$ 收敛.

   等价描述：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ 均绝对收敛.

5. 绝对收敛性质：

   (1) 级数各项可重排次序，其和不变.

   (2) 记 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{1k} = A, \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{2k} = B$，且

   $$z_k = z_{11}z_{2k} + z_{12}z_{2,k-1} + \cdots + z_{1k}z_{21},$$

   那么

   $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = AB.$$

5.1.2 复变函数项级数

1. 复变函数项级数：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$.

2. 一致收敛：部分和 $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$，若对 $\forall \varepsilon > 0$，总存在与 z 无关的 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，满足 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$，则称该级数一致收敛于 $f(z)$.

3. Cauchy 一致收敛准则：基本同复数项级数.

4. Weierstrass 判别法：若对 $\forall z \in E$ 均有 $|f_k(z)| \leqslant M_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上绝对一致收敛.
5. 一致收敛级数性质：连续性、可积性、可导性（此处要求解析）.

5.2 幂级数

1. 定义：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.
2. Abel 定理：
   (1) 幂级数在点 z_0 $(\neq a)$ 收敛 $\Longrightarrow$ 幂级数在圆域 $|z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛，在闭圆域 $|z-a| \leqslant \rho < |z_0-a|$ 内一致收敛.
   (2) 幂级数在点 z_0 发散 $\Longrightarrow$ 幂级数在圆外域 $|z-a| > |z_0-a|$ 内发散.
3. 设幂级数收敛半径为 R，则其在 $|z-a| < R$ 内绝对收敛，在 $|z-a| > R$ 内处处发散.
4. 收敛半径：$\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
5. 性质：
   (1) 和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在 $|z-a| < R$ 内解析，且
   $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}(z-a)^n.$$
   (2) $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

5.3 解析函数的泰勒展开

1. Taylor 展开收敛域：函数 $f(z)$ 在点 a 解析，若以点 a 为中心作一个圆，让圆的半径不断扩大直至碰上第一个奇点 a'，则 $R = |a'-a|$，且 $f(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内可展开成 Taylor 级数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$，其中 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
2. Taylor 展开式唯一.
3. $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件：$f(z)$ 能在 D 内任一点 a 可以展开成 $(z-a)$ 的幂级数.

注 目前 $f(z)$ 在 D 内解析的 3 个等价描述：
$$\begin{cases} \text{C-R 方程} \\ \text{Cauchy 积分定理与 Morera 定理} \\ \text{Taylor 展开} \end{cases}$$

4. 常用 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \ (|z| < 1), \\
\mathrm{Ln}_k(1+z) &= 2k\pi\mathrm{i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \ (|z| < 1).
\end{aligned}$$

注 求 Taylor 展开的两个技巧：

(1) 对于 $\dfrac{1}{(1-z)^{n+1}}, \dfrac{z}{(z^2+a^2)^2}$ 等类型的函数，可变形为 $\dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\dfrac{1}{1-z}\right), -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{1}{z^2+a^2}\right)$，将被求导函数作展开后再求导.

(2) 对于 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{\tan z}$ 等初等函数复合的函数，可设展开后 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$，再考虑 $\mathrm{e}^z = f(z)\tan z$ 的前若干项展开. 这里要求 $f(z)$ 绝对收敛.

5. 点 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的 2 个等价描述：

(1) $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

(2) 在点 z_0 附近有 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$，其中 $g(z)$ 在点 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

5.4 罗朗级数

1. 定义：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.
\end{aligned}$$

2. 收敛半径：$r < |z-a| < R$，其中 r, R 分别为主要部分（带负幂次项）、正则部分（幂级数项）的收敛半径.

3. 系数确定：$a_n = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \ (n \in \mathbb{Z})$，其中 C 为 D 内闭路.

4. 系数唯一性：利用积分 $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$ 的正交性可证.

5.5 解析函数的孤立奇点

1. 孤立奇点：函数 $f(z)$ 在点 a 的某个邻域 $|z-a|<\rho$ 内除 a 点外均解析，则称 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

   注 ∞ 点并非 $\tan z$ 的孤立奇点，因其奇点为 $a_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$，对于 ∞ 点的任一邻域，均存在绝对值足够大的整数 N，使得 a_N 被包含在内.

2. 分类：

   (1) 可去奇点：

   i. $f(z)$ 在环域 $0<|z-a|<\rho$ 内有界.

   ii. $\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$（有限）.

   (2) m 级极点：

   i. $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，其中 $\varphi(z)$ 在点 a 的邻域内解析且 $\varphi(a)\neq 0$[4].

   ii. a 是函数 $1/f(z)$ 的 m 级零点[5].

   (3) 本性奇点：

   i. Laurent 展开中的主要部分有无穷多项.

   ii. $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在.

   (4) a 是 $f(z)$ 的解析点和 $g(z)$ 的本性奇点，则 a 是 $f(z)g(z),\dfrac{f(z)}{g(z)},\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.
   特别地，若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 a 也是 $1/f(z)$ 的本性奇点.

   (5) 对于 ∞ 点，作代换 $\zeta=1/z$，类似可研究 $\zeta=0$ 处奇点种类.

[4] 多用于 $f(z)$ 表达式未知的证明题中

[5] 适用于取倒数易求导的函数

6 留数及其应用

6.1 留数定理

1. 留数：$\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.
2. 留数定理：$f(z)$ 在闭路 C 所围闭域内除去 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均解析，则
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),a_k].$$
3. $\operatorname{Res}[f(z),a]=a_{-1}$，其中 a_{-1} 为 Laurent 展开中 $(z-a)^{-1}$ 的系数[6].
4. 当 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点时，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$.
特别地，当 $m=1$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.
5. 设 $P(z),Q(z)$ 在点 a 解析，且 $P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$，则 $\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

6.2 积分计算

6.2.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 型积分

记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则
$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.$$

注 1. Poisson 积分：$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}\ (0<p<1)$.

2. 出现 $\cos kx$ 形式，别换成 $\dfrac{1}{2}\left(z^k+z^{-k}\right)$，而应考虑 $\operatorname{Re}(z^m)$，避免倍增多项式次数.

6.2.2 有理函数的积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,\mathrm{d}x$

设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数的比值，假定 $Q(x)$ 在实轴上无零点 $Q(x)$ 比 $P(x)$ 高两次，则
$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),a_k],$$
其中 $a_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 为 $R(z)$ 在上半平面的奇点.

三个引理：

1. $f(z)$ 在圆弧 $C_R:z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 上连续，若 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$，则
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

[6]常用于本性奇点、高阶极点或不易求导的函数中留数的计算

2. $f(z)$ 在圆弧 $C_\rho: z=a+\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 上连续，若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)k.$$

特别地，若点 a 为 $f(z)$ 的 1 级极点，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)\mathrm{Res}[f(z),a]$.

3. Jordan 引理：$g(z)$ 在圆弧 $C_R:|z|=R,\mathrm{Im}z>-a\ (a>0)$ 上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，则对 $\forall\lambda>0$，均有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z=0.$$

6.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin mx\,\mathrm{d}x, m>0$ 型积分

设 $R(z)$ 是有理函数，分母比分子至少高一次且在实轴上有单极点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，则

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x=I_1+\mathrm{i}I_2=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]+\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z),x_k].$$

6.2.4 杂例

辅助函数的 $F(z)$ 选取原则：$z=x$ 时，$F(x)=f(x)$，或 $\mathrm{Re}F(x)=f(x)$，或 $\mathrm{Im}F(x)=f(x)$.

1. $I=\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\int_0^{\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x\,,\int_0^{\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x.$
3. $I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x\ \ (a>0).$

6.2.5 多值函数的积分

1. $\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x$ 型：$R(x)$ 是在实轴上无奇点的偶有理函数，且分母比分子至少高 2 次.
辅助回路：圆弧 $C_\rho: z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$、圆弧 $C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta\leqslant R)$ 与实轴围成的半圆环. 利用圆弧上 $|\ln z|=\sqrt{(\ln r)^2+\theta^2}\leqslant\sqrt{(\ln r)^2+\pi^2}$，经放缩计算得

$$\int_0^{\infty} R(x)(2\ln x+\pi\mathrm{i})\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k],$$

取实部可得

$$\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]\right\}.$$

2. $\int_0^{\infty} x^p R(x)\,\mathrm{d}x$ 型：假定 $p\notin\mathbb{Z}$，$R(z)$ 是在实轴上无奇点的有理函数，且满足

$$\lim_{z\to 0} z^{p+1}R(z)=0,\quad \lim_{z\to\infty} z^{p+1}R(z)=0,$$

辅助回路：圆弧 $C_\rho : z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 < \theta < 2\pi)$、圆弧 $C_R : z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0 < \theta < 2\pi)$ 与正实轴上岸、下岸连接成的闭路.

计算可得

$$\int_0^{\infty} x^p R(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[z^p R(z), z_k],$$

其中 $z_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $f(z)$ 在全平面的奇点.

6.3 辐角原理

1. 设 a, b 分别是函数 $f(z)$ 的 m 级零点和 n 级极点，则 a, b 都是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的 1 级极点，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right] = m, \quad \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, b\right] = -n.$$

2. $f(z)$ 在闭路 C 围成的闭域内除有限个极点外解析，在 C 上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P,$$

其中 $N = \sum$ 零点级数，$P = \sum$ 极点级数.

3. 辐角原理：接上一条，$N - P = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$.

4. Rouché 定理：设函数 $f(z), \varphi(z)$ 在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有不等式 $|f(z)| > |\varphi(z)|$，则在 C 内部 $f(z) + \varphi(z)$ 与 $f(z)$ 同零点数.

5. 设多项式 $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ 在虚轴上无零点，若在点 z 沿虚轴从 $-\infty$ 到 ∞ 的过程中，$P(z)$ 绕原点转过 k 圈，则 $P(z)$ 在左半平面共有 $\left(\dfrac{n}{2} + k\right)$ 个零点.

7 解析开拓

7.1 唯一性定理和解析开拓的概念

1. 唯一性定理：设域 D 内点列 $\{\alpha_n\}$，满足 $f(\alpha_k)=g(\alpha_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a\in D$，则 $f(z)\equiv g(z)$, $\forall z\in D$.

   (1) $f(z)=g(z)$ 在 D 内某一段曲线上成立，则 $f(z)\equiv g(z)$, $\forall z\in D$.

   (2) $f(x)\equiv g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$，则 $f(z)\equiv g(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

2. $D=D_1\cap D_2$，且 D 内 $f_1(z)=f_2(z)$，则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 D_2 内的直接解析开拓，称 $f_1(z),f_2(z)$ 互为直接解析开拓，可定义

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1,\\ f_2(z), & z\in D_2.\end{cases}$$

8 保形变换及其应用

8.1 导数的几何意义

1. 保角性：在变换 $w=f(z)$ 下，通过 z_0 的任意两条曲线交角不变[7].
2. 伸张系数：$|f'(z_0)| \xlongequal{\Delta} \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$.

8.2 保形变换的概念

首先要求变换是双方单值的.

1. $f(z)$ 是 D 内的单叶函数，则 $f'(z)\neq 0, \forall z\in D$.
2. 保形变换：域 D 内单叶函数所确定的变换. 保形变换的乘积仍是保形变换.
3. 黎曼定理：如果 D 是闭复平面上的一个边界至少包含两个点的单连通区域，则不存在单叶函数 $w=f(z)$ 将 D 变为单位圆内部. 若进一步要求

$$f(z_0)=w_0,\quad \arg f'(z_0)=\alpha_0,$$

则此变换唯一.

8.3 分式线性变换

1. 定义：$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$，并规定 $w(\infty)=\dfrac{a}{c}, w(-d/c)=\infty$.
若 $c=0$，则称为整线性变换.
2. 特殊变换：
   (1) 平移变换　$T: w=z+b$.
   (2) 旋转变换　$R: w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ $(\theta\in\mathbb{R})$.
   (3) 相似变换　$S: w=rz$ $(r>0)$.
   (4) 倒数变换[8]　$I: w=1/z$.
3. 任何一个分式线性变换都可以表示成上述四类变换的乘积.
4. 保圆性：分式线性变换把圆周变为圆周（直线视为半径无穷大的圆周）.
5. 圆周 $C: |z-z_0|=R$，若 z_1, z_2 在自 z_0 出发的同一射线上，且 $|z_1-z_0||z_2-z_0|=R^2$，则称 z_1, z_2 关于圆周 C 对称.

---

[7] 对曲线 $z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，有

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0),$$
$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0),$$

则在同一点 z_0 处，旋转角 $\arg f'(z_0)$ 为常数

[8] 翻转单位圆内外

6. 分式线性变换将对称点变换为对称点.

7. 若 $w(z_i)=w_i\ (i=1,2,3)$，则存在唯一的分式线性变换：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

8. 若分式线性变换 $w(z)$ 满足 $w(z_1)=w_1, w(z_2)=w_2$，则

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

其中 k 为任意复常数，可利用 z,w 平面上圆周边界确定.
特别地，若 $w(z_1)=0, w(z_2)=\infty$，该变换简化为 $w(z)=k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.

注 求解偏心圆环到同心圆环的分式线性变换时，应先求出一对公共对称点 z_1,z_2，然后将对称点分别变换到圆心与 ∞ 点即可.

8.4 初等函数的映照

8.4.1 变换 $w=z^n$ 和 $w=\sqrt[n]{z}$，$n\geqslant 2$ 是自然数

1. 角域 $\alpha<\arg z<\beta\ (\beta-\alpha\leqslant 2\pi/n)\xrightarrow{w=z^n}$ 角域 $n\alpha<\arg w<n\beta$.
特别地，角域 $0<\arg z<\pi/n\xrightarrow{w=z^n}$上半 w 平面，角域 $0<\arg z<2\pi/n\xrightarrow{w=z^n}$去掉正实轴的 w 平面.

2. 角域 $\alpha<\arg z<\beta\xrightarrow{w=\sqrt[n]{z}}$ 第 k 个单值解析分支 $\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}<\arg w<\dfrac{\beta+2k\pi}{n}$.
常用第零支，即 $w(z)=\sqrt[n]{z}, w(1)=1$.
特别地，若取正实轴为支割线，z 平面 $\xrightarrow{w=\sqrt{z},w(1)=1}$ 上半 w 平面.

注 双圆周围成区域变换为上半平面的步骤：
两个交点其一变为原点、其一变为 ∞ 点 $\Longrightarrow$ 得到角域，旋转使辐角小的一边与正实轴重合 $\Longrightarrow$ 用幂函数放大角域成上半平面.

8.4.2 变换 $w=\mathrm{e}^z$ 和 $w=\mathrm{Ln}z$

1. 条形域 $a<\mathrm{Im}z<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$ 角域 $a<\arg w<b$.

2. 角域 $0<a<\arg z<b\xrightarrow{w=\mathrm{Ln}z}$ 条形域 $a+2k\pi<\mathrm{Im}w<b+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$，常取 $k=0$.

注 双圆周围成区域变换为条形域的步骤：
前两步同上 $\Longrightarrow$ 作指数变换，得到条形域 $0<\mathrm{Im}w<h\Longrightarrow$ 作伸缩变换与平移变换得到所需条形域.

9 拉氏变换

9.1 拉氏变换的定义

1. Laplace 变换(像函数): $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)=f(t)h(t)$, 复参变量 $p=\sigma+\mathrm{i}s$.
   该变换简记为 $F(p)=L[f(t)]$.

2. 附加条件:

   (1) $f(t)$ 在 t 的任何有限区间上逐段光滑.

   (2) $f(t)$ 是指数增长型的, 即 $|f(t)|\leqslant K\mathrm{e}^{ct}$, c 为 $f(t)$ 的增长指数.

   满足以上条件时, $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 上有意义, 且 $\left|\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{K}{\sigma-c}$.

3. $\lim\limits_{\sigma\to\infty} F(p)=0$.

4. 常用 Laplace 变换:

   (1) $L[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{p-a}$.

   (2) $L[t^{\alpha}]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

   特别地, $L[t^n]=\dfrac{n!}{p^{n+1}}, L[h(t)]=\dfrac{1}{p}$.

   (3) $L[\cos\omega t]=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}, L[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$,
   $L[\cosh\omega t]=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}, L[\sinh\omega t]=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$.

9.2 拉式变换的基本性质

1. 线性关系: $L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$.

2. 相似定理: $L[f(\alpha t)]=\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

3. 本函数的微分法: $L[f'(t)]=pF(p)-f(+0)$.
   推广: $L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-f^{(n-1)}(+0)$.

4. 本函数的积分法: $L\left[\int_0^t f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right]=\dfrac{F(p)}{p}$.

5. 像函数的微分法: $F'(p)=L[-tf(t)], F^{(n)}(p)=L[(-t)^nf(t)]$.

6. 像函数的积分法: $L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_p^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$.
   推论: $\int_0^{\infty}\dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$ (取 p 为 0).

7. 延迟定理: $L[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$.

8. 位移定理: $L[\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$.

9. 周期函数的像函数：$L[f(t)]=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

10. 卷积定理：$L[(f_1*f_2)t]=L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)]$，注意 $f_i(t)=f_i(t)h(t)\ (i=1,2)$
卷积：$(f*g)x=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

注 由此方法可计算得

$$L^{-1}\left[\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{at}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\Delta}\operatorname{erf}\left(\sqrt{at}\right).$$

9.3 由像函数求本函数

9.3.1 部分分式法

有理真分式 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 必定存在本函数：记 $a_k\ (k=1,2,\cdots,m)$ 为 $B(p)$ 的 m_k 级零点，则 $F(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{A_{ks}}{(p-a_k)^s}$，且

$$L^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_k}L^{-1}\left[\frac{A_{ks}}{(p-a_k)^s}\right]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{A_{ks}}{(s-1)!}t^{s-1}\mathrm{e}^{a_kt}.$$

先在实数（而非复数）范围内分解，有些分母为二次的项可直接化为三角函数.

9.3.2 拉氏变换的反演公式

设 $F(p)$ 在除半平面 $\mathrm{Re}p\leqslant\sigma$ 内各奇点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 外的 p 平面内处处解析，满足 $F(p)\to0\ (p\to\infty)$，且积分 $\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{d}p\ (\sigma>c)$ 绝对收敛，则

1. $F(p)$ 是 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$ 的像函数.

2. $f(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k\right]\ (t>0)$.

9.3.3 其他方法

若 $F(p)$ 在 ∞ 点解析且在 ∞ 点的邻域内有 Laurent 展开式 $F(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$，则将其逐项求本函数：

$$L^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{\infty}L^{-1}\left[\frac{c_k}{p^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}.$$

答题要点

1. 含 e^z 形式的函数极限，通常取 $z=\mathrm{Re}z=x$，再令 $x\to\pm\infty$ 证明极限不存在；有时也会令 $z=\mathrm{i}\mathrm{Im}z=\mathrm{i}y$.
2. 讨论 e^z-1 的零点时，别忘了除 0 之外的 $2k\pi\mathrm{i}$ $(k\in\mathbb{Z},k\neq0)$.
3. 若只考虑实函数 $g(x,y)$ 的实部或虚部时，可联想 $\mathrm{e}^{f(z)}$ 或 $\mathrm{Ln}f(z)$，如：$g(x,y)=u(z)$ 时，构造 $\mathrm{e}^{f(z)}$，使得 $\left|\mathrm{e}^{f(z)}\right|=\mathrm{e}^{u(z)}$；$g(x,y)=\arg f(z)$ 时，$\mathrm{Im}[\mathrm{Ln}f(z)]=\arg f(z)$.
4. 利用 $u(x,y)$（或 $v(x,y)$）求解 $v(x,y)$（或 $v(x,y)$）以构造 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 时，要先证明 $u(x,y)$ 是调和函数.
5. 展开成幂函数时要写收敛域.
6. 判定奇点时，可利用 $1/f(z)$ 的零点类型判定.
7. 对于 1 级极点 a，可利用 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.
8. 对于 $R(x)\ln x$ 与 $R(x)(\ln x)^2$ 应该用 $R(x)\ln x$ 还是 $x^pR(x)$ 型积分的方法，判断依据是：看 $R(x)$ 是否为偶函数，即是否有偏心. 若无偏心，为偶函数，则用前者；否则用后者，此时应构造函数 $R(x)(\ln x)^2$.
9. 作倒数变换 $w=1/z$ 时，注意积分路径反向，原积分需添一负号.
10. 利用留数计算积分时，优先判断哪些奇点在闭路所围成的域内.
11. 对于奇点多或奇点留数难以计算的复杂有理函数的积分，可考虑利用 Laurent 展开求 a_{-1}，如 $1/(z^2-1)(z^3+1)$.
12. 对于含高次三角函数的积分，如 $\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$，利用倍角公式降次后，不能将原本无奇点的积分拆成两个有奇点的积分（没有任何定理保证两个主值的和或差等于原积分值）. 将降次后的三角函数变为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$ 形式后，先将新函数重新配成至多含单极点的函数，如
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\longrightarrow\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^2},\quad\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\longrightarrow\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}-2}{4z^3},$$
再利用三个引理取半圆环围道进行讨论.
13. 对于 $\displaystyle\int_0^\infty x^pR(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分，必须优先检验 $\lim\limits_{z\to0}z^{p+1}R(z)=0$，$\lim\limits_{z\to\infty}z^{p+1}R(z)=0$.
14. 唯一性定理中，除去要求 $f(\alpha_n)=g(\alpha_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$，还要求 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha\in D$，如 $\sin\dfrac{1}{z}$ 在 $\alpha_k=1/k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 上恒为 0，但 $\lim\limits_{k\to\infty}(1/k\pi)=0$ 不在其定义域内.