复变函数笔记

邓嘉驹

2022 年 12 月 13 日

目录

1 复数和平面点集 **4**
1.1 复数 4
1.1.1 四则运算 4
1.1.2 共轭复数 4
1.1.3 复数的几何表示、模与辐角 4
1.1.4 复数的乘方和开方 4
1.1.5 复数序列的极限、无穷远点 4
1.2 平面点集 6
1.2.1 区域与曲线 6

2 复变数函数 **7**
2.1 函数极限与连续性 7
2.2 导数和解析函数的概念 7
2.3 柯西-黎曼方程 7
2.4 初等函数 8
2.4.1 幂函数 8
2.4.2 根式函数 9
2.4.3 指数函数 9
2.4.4 对数函数 10
2.4.5 三角函数 10
2.4.6 双曲函数 10
2.4.7 一般幂函数 11
2.4.8 反三角函数 11

3 解析函数的积分表示 **12**
3.1 复变函数的积分 12
3.2 柯西积分定理 13
3.3 原函数 14
3.4 柯西积分公式 15

3.5 解析函数的性质 16

4 调和函数 **18**
4.1 解析函数与调和函数的关系 18
4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题（未完成） 18

5 解析函数的级数展开 **20**
5.1 复级数的基本性质 20
5.1.1 复数项级数 20
5.1.2 复变函数项级数 21
5.2 幂级数 22
5.3 解析函数的 Taylor 展开 24
5.4 罗朗 (Laurent) 级数 25
5.5 解析函数的孤立奇点 28

6 留数及其应用 **31**
6.1 留数定理 31
6.2 积分计算 31
6.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 型积分 31
6.2.2 有理函数 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分 32
6.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$ $(m>0)$ 型的积分 33
6.2.4 $\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x$ 型的积分 34
6.2.5 $\int_0^{\infty} x^p R(x)\,\mathrm{d}x$ 型的积分 35
6.3 辐角原理 35

7 解析开拓 **37**
7.1 唯一性定理和解析开拓的概念 37
7.2 含复参变量积分及 Γ 函数 37

8 保形变换及其应用 **38**
8.1 导数的几何含义 38
8.2 保形变换的概念 38
8.3 分式线性变换 39
8.4 初等函数的映照 40
8.4.1 变换 $w=z^n$ 和 $w=\sqrt[n]{z}$ $(n\geqslant 2)$ 40
8.4.2 变换 $w=\mathrm{e}^z$ 和 $w=\mathrm{Ln}z$ 41
8.4.3 儒可夫斯基变换 41

9 拉氏变换 **42**
9.1 拉式变换的基本性质 44
9.1.1 线性关系 44
9.1.2 相似定理 44
9.1.3 本函数的微分法 44
9.1.4 本函数的积分法 44
9.1.5 像函数的微分法 44
9.1.6 像函数的积分法 45
9.1.7 延迟定理 45
9.1.8 位移定理 45
9.1.9 周期函数的像函数 46
9.1.10 卷积定理 46
9.2 由像函数求本函数 46
9.2.1 部分分式法 46
9.2.2 拉氏变换的反演公式 46
9.2.3 其他方法 47

A 要点回顾 **47**

1 复数和平面点集

1.1 复数

1.1.1 四则运算

记 $z_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ $(j = 1, 2)$，则

1. 加（减）法：$z_1 + z_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i}(b_1 \pm b_2)$;
2. 乘法：$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;
3. 除法：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$.

1.1.2 共轭复数

1. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$;
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;
4. $z\bar{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = |z|^2$.

1.1.3 复数的几何表示、模与辐角

复数 $z = x + y\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{i\theta}$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. 辐角主值 $\arg z = \theta$，辐角 $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. 其引申出的不等式：

1. $|x|, |y| \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|$;
2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

1.1.4 复数的乘方和开方

1. 乘方（de Moivre 公式）：$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$;
2. 开方：$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

1.1.5 复数序列的极限、无穷远点

1. 极限：设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是一个复数序列，z_0 是已给复数，如果

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n - z_0| = 0,$$

就称复数 z_0 是复数列 $\{z_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = z_0$ 或 $z_n \to z_0$.

等价描述：

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, . \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |z_0| \ (z_0 \neq 0), \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arg} z_n = \mathrm{Arg} z_0.$$

证 (1) 利用不等式

$$|x_n - x_0|, |y_n - y_0| \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

当 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 时，由不等式前半部分，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n - y_0) = 0$；
当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ 时，由不等式后半部分，$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - z_0) = 0$，得证.

(2) i. 充分性：由不等式 $||z_n| - |z_0|| \leqslant |z_n - z_0|$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$.
以 $z = z_0$ 点为圆心、$R = \delta$ 为半径作圆，由几何关系，

$$|\mathrm{Arg} z_n - \mathrm{Arg} z_0| < \arcsin \frac{\delta}{|z_0|},$$

取 $\delta = \varepsilon|z_0|$，那么对 $\forall \varepsilon > 0$，当 $n > N(\delta)$ 时，总满足 $|\mathrm{Arg} z_n - \mathrm{Arg} z_0| < \varepsilon$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg} z_n = \mathrm{Arg} z_0.$$

ii. 必要性：注意到

$$x_n = |z_n| \cos(\mathrm{Arg} z_n), \ y_n = |z_n| \sin(\mathrm{Arg} z_n),$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \cdot \cos\Big(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arg} z_n\Big) = |z_0| \cos(\mathrm{Arg} z_0) = x_0,$$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

2. 无穷远点：对于复数列 $\{z_n\}$，若对 $\forall M > 0$，总 $\exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，满足 $|z_n| > M$，则该数列收敛于无穷远点，记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

增加了 ∞ 点的复数平面称为**扩充平面**或**闭复平面**[1]，与其对应的是**复数球面**（或 Riemann 球面）. 关于无穷远点的其他规定：

(1) ∞ 的实部、虚部和辐角无意义，其模 $|\infty| = +\infty$；
(2) 若 $a \neq 0$，则 $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$，$\dfrac{a}{0} = \infty$；
(3) 若 $a \neq \infty$，则 $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$，$\dfrac{a}{\infty} = 0$，$\dfrac{\infty}{a} = \infty$；
(4) 闭复平面上任意 $|z| > R$ 的区域均为**无穷远点的邻域**[2].

[1] 原来的复数平面称为开平面或有限平面
[2] 该区域对应 Riemann 球面某维度以北的地区

1.2 平面点集

1.2.1 区域与曲线

1. 具有下列性质的非空点集 D 称为**区域**：

   (1) D 是开集；

   (2) D 中任意两点可以用一条全在 D 中的折线连接起来（连通性）.

   区域 D 加上它的边界 C 称为**闭域**，记为 $\bar{D}=C+D$.

2. Jordan 曲线：设 $x(t),y(t)$ 是定义在 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，则由方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad \text{或} \quad z=z(t)=x(t)+iy(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

   所决定的点集 l，称为复平面上的一条连续曲线. 对于其上 $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$，$t_1\neq t_2$，且t_1,t_2不同时为区间端点时，若 $z(t_1)\neq z(t_2)$，则称该曲线为**简单曲线**（Jordan 曲线）. 性质：

   (1) 任一条简单闭曲线将整个平面分为内区域和外区域；

   (2) 内区域 D 中任何简单闭曲线的内区域中的每一点都属于 D，这样的域 D 称为**单连通区域**；其余区域称为**多连通区域**.

2 复变数函数

2.1 函数极限与连续性

1. 极限：设函数 $w=f(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta\leqslant\rho$ 时，$|f(z)-w_0|<\varepsilon$，那么 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$.

2. 连续：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\implies f(z)$ 在点 z_0 连续；$f(z)$ 在区域 D 中每点都连续 $\implies f(z)$ 在区域 D 中连续.

3. 连续的证明[3]：
   $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续 $\iff u(x,y),v(x,y)$ 均在 (x_0,y_0) 连续.

2.2 导数和解析函数的概念

1. 导数：$w=f(z)$ 在 z 点的某邻域 U 内有定义，$z+\Delta z\in U$，则 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在时，$f(z)$在 z 点**可微**，该极限值为其导数.

2. $f(z)$ 可微 $\implies f(z)$ 连续.

   证 $f(z)$ 在 z 点可微 $\implies$ 令

   $$\alpha=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z),$$

   则 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\alpha=0\implies\alpha=o(|\Delta z|)$，即

   $$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

   因此 $\lim\limits_{\Delta z\to0}f(z+\Delta z)=f(z)+0+0=f(z)$.

3. 解析：$f(z)$ 在 D 内每一点可微 $\implies f(z)$ 在 D 内**解析**，$f(z)$ 是 D 内的**解析函数**；若 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内可微，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析[4].

4. 奇点：$f(z)$ 上不解析的点.

5. 求导法则：与实变函数一致.

   注 $f(z)$ 在点可微是一个强条件，它要求 $f(z)$沿任意路径趋于 z 点的极限值相同.

2.3 柯西-黎曼方程

1. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微的充要条件：

   (1) $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微；

[3]提示：$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|,|v(x,y)-v(x_0,y_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|\leqslant|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|$

[4]可见解析的概念与区域相联系

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 满足**柯西-黎曼方程**（简称C-R 方程）：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证 (1) 必要性：设 $f'(z)=a+\mathrm{i}b$，则

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(a+\mathrm{i}b)\Delta z+o(|z|)=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o(|z|),$$

记 $|z|=\rho$, 对比两边实部和虚部：

$$\begin{cases}u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(\rho),\\ v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(\rho,)\end{cases}$$

对比可知，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b.$$

(2) 充分性：由于以上各步均可逆，因此逆推得证.

那么

$$\begin{aligned}f'(z)=a+\mathrm{i}b&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

2. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内可微（解析）的充要条件：

   (1) $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内可微；

   (2) $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内处处满足 C-R 方程.

2.4 初等函数

单叶函数：如果 $w=f(z)$ 是区域 D 内的一一解析映照，则称 $f(z)$ 是 D 内的**单叶函数**，D 称为 $f(z)$ 的单叶性区域.

2.4.1 幂函数

1. 定义：$w=z^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$；
2. 单叶性区域：z 平面上的任何一个以原点为顶点、跨度不大于 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的角域：

$$\alpha<\arg z<\beta,\quad \beta-\alpha\leqslant\frac{2\pi}{n}.$$

3. 特殊角域 D_0：$-\dfrac{\pi}{n}<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$，它被单叶映照成沿负实轴割开的 w 平面：$-\pi<\arg w<\pi$. 其中角域的一边 $\arg w=-\pi$ 处称为 w 平面**负实轴的下岸**，另一边 $\arg w=\pi$ 处称为**负实轴的上岸**.
4. 习惯上选定的角域：$D_k:\dfrac{2k-1}{n}\pi<\arg z<\dfrac{2k+1}{n}\pi,\ k=0,1,\cdots,n-1.$

2.4.2 根式函数

1. 定义：$w=\sqrt[n]{z}\ (n\geqslant 2, n\in\mathbb{N})$. 根式函数是多值函数.

2. 支点：对于某个多值函数 $w=f(z)$，若存在点 $z=a$，使得在 $z=a$ 的充分小邻域内，作一条包围该点的曲线 C，当 z 从 C 上某点出发，绕 C 连续变动一周回到出发点时，$f(z)$ 将从它的一个值变到另一个值，就称 a 是 $f(z)$ 的**支点**.

3. 支割线：对于函数 $w=\sqrt[n]{z}$，其支点为 0 与 ∞，因此任意作一条从原点 0 到 ∞ 的射线，称其为支割线. 支割线将 z 平面割开形成一个区域 G，在 G 内的任何闭曲线不会把支点包含在内部. 这样确定的单值函数，叫做 $\sqrt[n]{z}$ 在 G 内的一个**单连续分支**.

4. 一般地，取负实轴为支割线，多值函数 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个单连续分支

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg z}{n}\right),\quad (2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

5. 单值解析分支：设 $F(z)$ 是区域 D 的多值函数，$f(z)$ 是 D 内的单值解析函数. 如果 $f(z)$ 在 D 内的每一点的值，都等于 $F(z)$ 在该点的一个值，则 $f(z)$ 称为 $F(z)$ 在 D 内的一个**单值解析分支**[5].

2.4.3 指数函数

1. 定义：$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+iy}$.

2. 函数性质：

   (1) 对 $\forall z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^z\neq 0$（注意到 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x\neq 0$）.

   (2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在.

   (3) 加法公式：$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$.

   (4) $\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}2k\pi}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi}\ (k\in\mathbb{Z})\implies$ 周期 $T=2\pi\mathrm{i}$.

   (5) $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}\iff z_1=z_2+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

3. 映照性质[6]

   (1) $|w|=\mathrm{e}^x, \arg w=y$.

   (2) 直线 $L:\mathrm{Im}z=y_0\ (-\pi<y_0<\pi)\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}|w|=\mathrm{e}^x\in(0,+\infty), \arg w=y_0$
   映照出射线$L:\arg w=y_0$.

   (3) 直线 $L:\mathrm{Re}z=x_0\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}|w|=\mathrm{e}^{x_0}, \arg w=y\in(-\pi,\pi)$.
   映照出圆周$C:|w|=\mathrm{e}^{x_0}$ 除去支割线上点 $w=-\mathrm{e}^{x_0}$.

   (4) 条形域$a<\mathrm{Im}z<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$角域$a<\arg z<b$. 特别地，若 $a=(2k-1)\pi, b=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbb{Z})$，则映照成沿负实轴剪开的 w 平面.

   (5) 条形域$a<\mathrm{Re}z<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$圆环$a<|w|<b$.

[5] 计算导数值时，两边必须取**同一分支**

[6] 保形变换中将大有用处

2.4.4 对数函数

1. 定义：$w=\mathrm{Ln}z$

2. 含义：设 $w=u+\mathrm{i}v$，则 $z=\mathrm{e}^w=\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}\implies |z|=\mathrm{e}^u,\arg z=v$，那么

$$\mathrm{Ln}z=\ln|w|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z=\ln|z|+\mathrm{i}\ln\arg z+\mathrm{i}\arg z+\mathrm{i}2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

   也常取 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z\ (-\pi<\arg z\leqslant\pi)$ 作为 $\mathrm{Ln}z$ 的**主值**.

3. 运算法则：$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,\ \mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.$

   证 利用 $\ln x\ (x\in\mathbb{R})$ 的运算法则及正切的和角公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1z_2)&=\ln|z_1z_2|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1z_2)=(\ln|z_1|+\ln|z_2|)+\mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)\\&=(\ln|z_1|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z_1)+(\ln|z_2|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2.\end{aligned}$$

4. 单值解析分支：$w_k=(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+\mathrm{i}2k\pi,\ -\pi<\arg z<\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$
   并且映照：角域$-\pi<\arg z<\pi\xrightarrow{w=\mathrm{Ln}z}$条形域$-\pi<\mathrm{Im}z<\pi.$

2.4.5 三角函数

1. 复变正弦函数、余弦函数：

$$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),\quad \sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}).$$

2. 复变正切、余切函数：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

3. 复变正（余）弦函数性质性质：

   (1) 是周期 $T=2\pi$ 的函数.

   (2) $\sin z=0\iff z=n\pi\ (n\in\mathbb{Z}),\ \cos z=0\iff z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\ (n\in\mathbb{Z}).$

   (3) 导数：$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z;\ (\tan z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z},\ (\cot z)'=-\dfrac{1}{\sin^2 z}.$

   (4) $\cos^2 z+\sin^2 z=1.$

   (5) $|\sin z|,|\cos z|$ 均无界（如取 $z=iy$）.

2.4.6 双曲函数

1. 定义：

$$\cosh z=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2},\quad \sinh z=\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2},$$
$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\quad \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

2. 与三角函数的关系：

$$\cosh z = \cos \mathrm{i}z, \quad \sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z,$$
$$\tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z, \quad \coth z = i\cot \mathrm{i}z.$$

3. 导数：

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z,$$
$$(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}, \quad (\coth z)' = -\frac{1}{\sinh^2 z}.$$

4. 其他公式：$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$，$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$ 等.

2.4.7 一般幂函数

1. 定义：对于 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ 及 $z \neq 0$，z 的 α 次幂定义为：

$$z^\alpha \triangleq \exp(\alpha \mathrm{Ln} z) = \exp\{\alpha(\ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z)\}.$$

若 $\alpha \in \mathbb{R}^+$，补充规定 $z = 0$ 时，$z^\alpha = 0$.

2. 函数值的具体讨论：

(1) $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ 时，与通常幂函数一致.

(2) $\alpha = \dfrac{1}{n}$，$n \in \mathbb{N}^*$ 时，为根式函数. 类似地，当 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 时，如 $\alpha = \dfrac{m}{n}$，则 $z^\alpha = \sqrt[n]{z^m}$.

(3) α 为无理数或一般复数（$\mathrm{Im}z \neq 0$）时，由定义知，该函数为无穷多值的[7]：

$$|z^\alpha| = |\exp[(\alpha_x + \mathrm{i}\alpha_y)(\ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z)]| = \exp[\alpha_x \ln z - \alpha_y \arg z - 2\alpha_y k\pi] \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2.4.8 反三角函数

1. 推导思路：反解方程.

2. 公式：

(1) $\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2})$.

(2) $\mathrm{Arccos}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

(3) $\mathrm{Arctan}z = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}$.

(4) $\mathrm{Arccot}z = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

(5) $\mathrm{Arcsinh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$.

(6) $\mathrm{Arccosh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

(7) $\mathrm{Arctanh}z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}$.

(8) $\mathrm{Arccoth}z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{z + 1}{z - 1}$.

[7] 主要来源：对数函数中 $\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$ 的多值性

3 解析函数的积分表示

3.1 复变函数的积分

1. 定义：设 C 是平面上的一条逐段光滑的曲线，$w=f(z)$ 是定义在曲线 C 上的一个单值连续函数，任意用一系列分点 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$ $(k=0,1,2,\dots,n)$ 把曲线 C 分成许多小段，在每一小段 $z_{k-1}z_k$ 中任取一点 ζ_k，作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\ \Delta z_k,\quad \Delta z_k=z_k=z_{k-1}.$$

令 $\lambda=\max\limits_{k}|\Delta z_k|$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，上述极限存在，并且其取值与与弧段的分法及各 ζ_k 的选取无关，则称这个极限为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记作 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

2. 定理：

(1) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\in C$，则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z&=\int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\int_C u(x,y)\,\mathrm{d}x-v(x,y)\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v(x,y)\,\mathrm{d}x+u(x,y)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

(2) 设 C 是简单光滑曲线：$x=x(t),y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，则曲线 $C:z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，且

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z&=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b [ux'(t)-vy'(t)]\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b [vx'(t)+uy'(t)]\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b (u+\mathrm{i}v)[x'(t)+\mathrm{i}y'(t)]\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

(3) 设 $n\in\mathbb{Z}$，C 是以 a 点为中心、R 为半径的圆周，那么

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

证 C 的参数方程是 $z=a+Re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$，那么

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\cdot\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mathrm{i}}{R^{n,-1}}\int_0^{2\pi}\cos(n-1)\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi}\sin(n-1)\theta\\&=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

3. 性质：

(1) $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_C [f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(5) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|.$

推论（**长大不等式**）：若 $|f(z)|\leqslant M$，曲线 C 长为 l，则 $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml.$

3.2 柯西积分定理

1. 定理：

(1) 设 D 是由闭路C 所围成的单连通区域，$f(z)$ 在闭域 $C+D$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证 由定义及 Green 公式，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}x\\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 C-R 方程，$f(z)$解析 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，因此 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

(2) 设有 $(n+1)$ 条简单闭曲线 $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$，其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 每一条都在其余各条的外区域内、在 C_0 内部，默认为正向. 设 $f(z)$ 在闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域解析，则

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

或 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

应用 设 a 是闭路 C 内任一点，则

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1\end{cases} \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

证 以点 a 为圆心作一半径为 R 的圆 C_1，由定理，

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

2. 推论：

(1) 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C 是 D 内的任意封闭曲线，则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(2) 设 $f(z)$ 在单连通域内解析，C 是一条起于点 z_0 而终于点 z 的简单曲线，则积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 的值不依赖于积分路径 C，而只由 z_0 及 z 确定. 因此这个积分也可记作

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \quad 或 \quad \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

3.3 原函数

1. 定义：$F'(z) = f(z) \implies F(z)$ 是原函数.

2. $f(z)$ 在单连通域内解析 $\implies F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ 亦解析，且 $F'(z) = f(z)$.

证 相当于证明 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$. 考虑

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

同时 $\dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \mathrm{d}\zeta = 1 \implies f(z) = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta$. 又因为 $f(z) \in \mathrm{C}(D)$，对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta > 0$，使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 注意到积分与路线无关，则取路径为从 z 到 $z+\Delta z$ 的直线段，路径长 $l = |\Delta z|$，那么结合长大不等式，

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)||\mathrm{d}\zeta| \\ &< \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$.

3. Newtom-Leibiz 公式：$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = H(z) - H(z_0)$.

4. 补充：对于多连通区域 D 内解析的 $f(z)$，作两条连接 z_0 和 z 的简单曲线 C_1 和 C_2. 若 $f(z)$ 在 C_1 与 C_2 包围的区域内解析，则 $\int_{z_0,C_1}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{Z_0,C_2}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ 依然成立；但若 $f(z)$ 不在其内解析（含无定义区域，即“洞”），则 $F(z)$ 为多值函数.

3.4 柯西积分公式

1. 设函数 $f(z)$ 在（复）闭路 C 及其所围区域 D 内解析，则对 D 内任一点 z，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

证 记 Γ 为圆周 $|\zeta-z|=\rho$，$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在 $D/\{z\}$ 内解析. 由于 $f(z)$ 在 $C+D$ 内解析，且 ρ 可任意小（不改变积分值），则

$$\begin{aligned}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}&=\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=f(z)\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}+\int_\Gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\&=f(z)\cdot2\pi\mathrm{i}+\int_\Gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}f(z)+\lim_{\rho\to0}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\&=2\pi\mathrm{i}f(z)+\lim_{\rho\to0}\frac{f(\xi(\rho))-f(z)}{\xi(\rho)-z}\cdot2\pi\rho=2\pi\mathrm{i}f(z)+f'(z)\cdot0.\end{aligned}$$

即 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$.

2. 在上一条的条件下，对 D 内任一点 z，$f(z)$ 有任意阶导数，则

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

证 (1) 当 $n=1$ 时，记 z 到闭路 C 的最短距离为 δ，则当 $|h|<\delta$ 时，$z+h\in D$. 考虑

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}&=\frac{1}{2\pi h\mathrm{i}}\left[\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+h)}\,\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta\,.\end{aligned}$$

下证 $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$. 作差得

$$\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right|=\left|\int_C\frac{hf(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right|.$$

当 $f(z)$ 在边界 C 上时，$f(z)$ 有界：$|f(z)|\leqslant M$，且

$$|\zeta-z|\geqslant\delta,|\zeta-z-h|\geqslant|\zeta-z|-|h|\geqslant\delta-h.$$

因此

$$\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{Mh}{\delta(\delta-h)}\to0\quad(h\to0).$$

即有

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{h\to0}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}.\end{aligned}$$

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时，假定 $n = k-1$ 时结论成立，且始终有 $|h| < \delta$，则 $n = k$ 时，

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k-1)}(z+h) - f^{(k-1)}(z)}{h} \\ &= \frac{(k-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{h\to 0} \int_C \frac{f(\zeta) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \mathrm{C}_k^i h^i (\zeta - z)^{k-i}}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^k} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{(k-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta) \cdot k(\zeta - z)^{k-1}}{(\zeta - z)^{2k}} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta \,. \end{aligned}$$

因此该结论成立.

3.5 解析函数的性质

1. **平均值公式** 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leqslant R$ 上解析，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_C f(\zeta) \,\mathrm{d}s \,.$$

其中 C 是圆周 $|z-a| = R$，$\mathrm{d}s$ 是 C 上弧长的微分.

证 由柯西积分公式，

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z \xlongequal{z = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \cdot \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(z) \cdot R\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_C f(z) \,\mathrm{d}s \,. \end{aligned}$$

2. **最大模原理** 设 $f(z)$ 在有界域 D 内解析，在有界闭域 $C + D$ 上连续，这里 C 是 D 的边界. 并且 $f(z)$ 不恒等于常数，那么 $|f(z)|$ 只能在边界 C 上取到 $C + D$ 内的最大值.

证 假设最大模在 D 内部的 z_0 点取到，那么由平均值公式，对任意大的半径 R，有

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi R} \int_{C_0} f(\zeta) \,\mathrm{d}s \right| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int_{C_0} |f(\zeta)| \,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi R} \cdot |f(\zeta)|_{\max} \cdot 2\pi R = |f(\zeta)|_{\max}. \end{aligned}$$

另一方面，$|f(z_0)| \geqslant |f(\zeta)|_{\max}$, $\forall \zeta \in D$，因此 $|f(z_0)| = |f(\zeta)|_{\max}$. 代回最初的不等式，有

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_0} |f(\zeta)| \,\mathrm{d}s \implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - f(\zeta)] \,\mathrm{d}\theta = 0.$$

由于 $|f(z_0)| \geqslant |f(\zeta)|$，被积函数非负，因此 $|f(z_0)| \equiv |f(\zeta)|$，即 $f(z)$ 在 D 内处处相等. 由 $f(z)$ 的连续性，C 上 $f(z)$ 的值也与 D 内函数值处处相等，这与题设条件矛盾，因此假设不成立，即最大模只能在边界 C 上取到.

3. **柯西不等式** 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，以 D 内任一点 z 为圆心，作一个包含在 D 内的圆周 $C : |\zeta - z| = R$，设 $M(R)$ 是 $f(z)$ 在 C 上的最大值，则

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leqslant \frac{n! M(R)}{R^n}.$$

证 由柯西积分公式，

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z)\right| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(\zeta)|}{R^{n+1}}\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M(R)}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!M(R)}{R^n}.\end{aligned}$$

4. **刘维尔（Liouville）定理** 如果整函数在整个平面上有界，即对所有的 z 满足不等式 $|f(z)|\leqslant M$，则 $f(z)$ 必是常数.

   证 由柯西不等式，$|f'(z)|\leqslant \dfrac{M}{R}$. 由于 R 可以任意大，为使该式成立，当且仅当 $|f'(z)|=0 \Longleftrightarrow f'(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$，因此 $f(z)$ 为常数.

5. **代数学基本定理** 任何复系数多项式

   $$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n,\quad n\geqslant 1, a_n\neq 0$$

   必有零点，即方程 $f(z)=0$ 必有根.

   证 (1) $a_0=0$，则零点为 $z=0$.

   (2) $a_0\neq 0$，则假设 $f(z)$ 无零点. 记 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，那么

   $$\lim_{z\to\infty} g(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{f(z)}=0.$$

   对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists R$ 充分大，使得当 $|z|>R$ 时，$|g(z)|<\varepsilon$，即 $g(z)$ 有界. 而当 $|z|\leqslant R$ 时，由于 $f(z)$ 连续，故 $f(z)$ 有界. 因此 $f(z)$ 在全平面上有界，由刘维尔定理，$g(z)$ 即 $f(z)$ 为常数，这显然是不成立的[8]，故 $f(z)$ 必有零点.

6. **莫雷拉（Morera）定理** 如果函数 $f(z)$ 在域 D 中是连续的，并且对 D 中任意封闭曲线 C 有

   $$\int_C f(z)=0,$$

   则 $f(z)$ 在 D 内解析.

   证 记 $F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，由题设条件，$F(z)$ 为单值函数，且 $F(z)$ 在 D 内解析，$F'(z)=f(z)$. 由柯西积分公式，$F(z)$ 存在任意阶导数，即 $F(z)$ 的任意阶导数解析，即 $f(z)$ 在 D 内解析.

7. $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析 $\Longleftrightarrow f(z)\in \mathrm{C}(D)$，且对 D 内的任何闭路 C，满足

   $$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

[8] 要求 $a_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$，这与 $a_n\neq 0$ 矛盾

4 调和函数

4.1 解析函数与调和函数的关系

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内是解析函数，则其实部与虚部分别为调和函数，且有定理：

1. 设 $f(z)$ 在域 D 内解析，那么它的实部和虚部是该区域内的**共轭调和函数**.

2. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，那么等值曲线族

$$u(x,y)=K_1,\quad v(x,y)=K_2$$

在其公共点上永远是相互正交的，这里 K_1,K_2 为常数.

证 由题意，等值线的法线

$$\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \boldsymbol{n}_2=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

结合 C-R 方程，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\\&=0.\end{aligned}$$

正交性得证.

3. 设 $u(x,y)$ 是单连续区域 D 内的调和函数，则由线积分所确定的函数

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+C$$

使得 $f(z)=u(x,y)=\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内解析，其中 (x,y) 是 D 内任一点，(x_0,y_0) 是 D 内一定点，C 为实常数.

证 此定理回答了“**仅通过实部或虚部确定一个单连通域内解析的函数**”[9]的问题，证明的关键是 C-R 方程，步骤略.

4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题（未完成）

以下简记 $u(x,y)$ 为 $u(z)$.

1. **平均值定理** 设 $u(z)$ 是闭圆 $\overline{D}:|z-z_0|\leqslant R$ 内的调和函数[10]，则

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C u(z)\,\mathrm{d}s\,,$$

这里，C 是圆周 $|z-z_0|=R$.

[9] 对于多连通区域，线积分为多值函数

[10] 这应理解为在包含 $\overline{D}$ 的某个较大区域内是调和函数

证 由解析函数的平均值原理，

$$u(z_0)+\mathrm{i}v(z_0)=f(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi R}\int_C [u(z)+\mathrm{i}v(z)]\,\mathrm{d}s\,.$$

等式两端取实部，则得证.

2. **极值原理** 若函数 $u(x,y)$ 在一个有界域 D 内是调和函数，且在有界闭域 $C+D$ 上连续，这里 C 是 D 的边界，并且 u 不恒等于常数，则函数 $u(z)$ 只能在域 D 的边界 C 上取到整个有界闭域 $C+D$ 上的最大值和最小值.

   证 利用最大模原理，先求出以 $u(z)$ 为实部且在 D 内解析的函数 $f(z)$，再取 $\mathrm{e}^{f(z)}$，则 $\left|\mathrm{e}^{f(z)}\right|=\mathrm{e}^{u(z)}$. 假定 $u(z)$ 在 D 内某点 z_0 取到最大值，则 $\mathrm{e}^{f(z)}$ 最大模在 D 内取到. 注意到

   $$u(z)\neq\text{const}\implies f(z)\neq\text{const}\implies \mathrm{e}^{f(z)}\neq\text{const}.$$

   因此这与最大模原理矛盾，故 $u(z)$ 只能在边界 C 上取到最大值.
   再考虑 $-u(z)$，可证 $u(z)$ 只能在边界 C 上取到最小值.

3. **Poisson 积分公式** 设 $u(z)$ 是闭圆 $D:|z-z_0|\leqslant R$ 上的调和函数，则对此圆内部任一点 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ $(r<R)$，有

   $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

   这里记 $u(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=u(r,\varphi)$，$u(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=u(R,\theta)$.

5 解析函数的级数展开

5.1 复级数的基本性质

5.1.1 复数项级数

1. 定义：设 $\{z_n\}$ 是一复数列，表达式

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为**复数项无穷级数**，其**部分和**记为 S_n，即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n.$$

2. 记 $a_k = \operatorname{Re} z_k, b_k = \operatorname{Im} z_k$，那么

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} b_k,$$

则 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 均收敛.

3. **柯西收敛准则** 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛的充要条件是，对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

推论 此级数收敛的必要条件为[11] $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

4. 定义：如果级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$$

收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ **绝对收敛**.

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛.

推论 若复级数绝对收敛，则其必然收敛.

6. 性质：

(1) 一个绝对收敛的复数项级数各项可任意重排次序，仍绝对收敛，其和不变.

[11] 常用于判断发散的级数

(2) 若两个绝对收敛的级数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n} = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n} = B,$$

若记

$$z_n = z_{11}z_{2n} + z_{12}z_{2,n-1} + \cdots + z_{1n}z_{21},$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 同样绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_{1n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}\right) = AB.$$

5.1.2 复变函数项级数

1. 定义：设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在平面点集 E 上的复变函数列，则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为集 E 上的一个复变函数项级数.

2. 定义：设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在集 E 上收敛于 $f(z)$，记其部分和为

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z),$$

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$[12]，使得当 $n > N$ 时，满足

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上**一致收敛**于函数 $f(z)$.

3. **柯西一致收敛准则** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在集 E 上一致收敛的充分必要条件为：对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，对 $\forall z \in E$ 与 $\forall p \in \mathbb{N}$ 满足

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

4. **Weierstrass 判别法** 如果对集 E 上的所有点 z 都有

$$|f_k(z)| \leqslant M_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

而正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上绝对一致收敛，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 称为其**强级数**.

[12] 该自然数不随 z_0 的取值而变化

5. 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在下述讨论区间内一致收敛于 $f(z)$ 时，

(1) 若 $f_k(z) \in C(D)$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $f(z) \in C(D)$.

(2) 若 $f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在曲线 C 上连续，则 $f(z)$ 可沿 C 逐项积分，且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

证 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$ 时，对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) > 0$，当 $n > N$ 时，满足

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

那么由长大不等式，

$$\left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_C \left[f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right] \mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon L(C).$$

记 $\varepsilon' = \varepsilon L(C)$，那么部分和有极限，并且

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

(3) 若 $f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内解析，可求导至任意多阶，且

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z).$$

5.2 幂级数

1. 定义：$f_n(z) = a_n(z-a)^n$ 的函数项级数，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

2. **Abel 定理**

(1) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在某点 z_0 $(\neq a)$ 收敛，则其在圆 $|z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛.

(2) 在 (1) 的条件下，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在任何闭圆 $|z-a| \leqslant \rho$ $(\rho < |z_0-a|)$ 上一致收敛.

(3) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在某点 z_1 发散，则其在圆外域 $|z-a| > |z_1-a|$ 内处处发散.

证 (1) 由于幂级数在 z_0 处收敛，故

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n = 0,$$

即 $a_n(z_0-a)^n$ 有界，记作 $|a_n||z_0-a|^n \leqslant M$ $(M\in\mathbb{R}^+)$. 由于 $|z-a|<|z_0-a|$，故记

$$q(z) = \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1.$$

因此

$$|a_n(z-a)^n| \leqslant \frac{M}{|z_0-a|^n}\cdot|z-a|^n = Mq^n(z).$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mq^n = \dfrac{M}{1-q(z)}$ 收敛，因此幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 绝对收敛.

(2) 此时 $\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right| \leqslant \rho$，这里的 ρ 与 z 取值无关，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\rho^n$ 为幂级数的强级数，从而该幂级数绝对一致收敛.

(3) 反证法. 若幂级数在圆外域某点 z_2 收敛，由第一条性质，该幂级数在 $|z_1-a|<|z_2-a|$ 处即 z_1 处收敛，矛盾.

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R，则

(1) 若 $0<R<+\infty$，则该级数在圆 $D:|z-a|<R$ 内绝对收敛；在圆外域 $|z-a|>R$ 内处处发散.

(2) 若 $R=+\infty$，则该级数在全平面内收敛.

(3) 若 $R=0$，则该级数在全平面内除 $z=a$ 外处处发散.

4. 收敛半径 R 的计算：

$$A = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

则收敛半径 $R=1/A$.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛半径为 R，则

(1) 和函数 $f(z)$ 是**收敛圆** $|z-a|<R$ 内的解析函数，并且可以逐项求导至任意阶：

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \\ &\xlongequal{n-k\to n} \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}(z-a)^n. \end{aligned}$$

(2) 各项系数[13]：$a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

[13]此结论由上一结论取 $z=a$ 可证

5.3 解析函数的 Taylor 展开

1. 设函数 $f(z)$ 在点 a 解析，在以 a 为圆心、半径尽可能大且不包含 $f(z)$ 的奇点[14]的圆域内，$f(z)$ 可展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

证 在此圆域内，对任一点 z，以点 a 为圆心作一包含点 z 的闭圆，其边界记为 C，则由柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

注意到点 z 在 C 围成的闭圆内，故 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$，那么$\dfrac{1}{\zeta-z}$ 可展开成几何级数：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n.$$

再次利用柯西公式：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\cdots$$

可改写最初的积分：

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\cdot\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}\cdot\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.\end{aligned}$$

2. 性质：

   (1) 函数 $f(z)$ 在任一解析点的 Taylor 展开式唯一.

   (2) 幂级数是其和函数在收敛圆内的 Taylor 展开式.

3. $f(z)$ 在区域 D 内解析[15]的充要条件是：$f(z)$ 在 D 内任一点 a 可以展开成 $(z-a)$ 的幂级数.

4. 常用 Taylor 级数：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\\\cos z&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots,\\\sin z&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots.\end{aligned}$$

[14] 若 $f(z)$ 无奇点，则此圆域为全平面

[15] 至此有定义法、C-R 方程、幂级数展开这四种证明 $f(z)$ 解析的方法

5. **切比雪夫多项式** 设 $t \in [-1,1]$ 是参数，则函数

$$f(z) = \frac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$$

在 $z=0$ 的 Taylor 展开式为切比雪夫多项式.

6. 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析，且 $f(z_0)=0$，则称 z_0 是 $f(z)$ 的零点，此时 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域 U 内的 Taylor 展开式为

$$f(z) = a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots .$$

可能出现两种情况：

(1) 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $a_n = 0$，则 $f(z)$ 在 U 内恒为零.

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零，则必然 $\exists m \in \mathbb{N}$，使得 $a_m \neq 0$ 且对 $\forall n < m$，均有 $a_n = 0$. 此时称 z_0 为 $f(z)$ 的 m **级（m 阶）零点**. 特别地，$m=1$ 时，称 z_0 是 $f(z)$ 的单零点.

7. 点 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的充分必要条件是：$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$，而 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

8. 点 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的充分必要条件是在 z_0 点的附近有

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

并且 $g(z)$ 在点 z_0解析.

9. **零点的孤立性** 设 $f(z)$ 在 z_0 解析，且 z_0 为其一个零点，则 $f(z)$ 或者在 z_0 的一个邻域内恒为零；或者存在 z_0 的一个邻域，在此邻域内 z_0 是 $f(z)$ 的唯一零点.

5.4 罗朗 (Laurent) 级数

1. 定义：形如

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_b(z-a)^n\end{aligned}$$

的级数，称为 **Laurent 级数**，其中 a, a_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为复常数.
当这两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

均收敛时，称 Laurent 级数**收敛**.

2. 收敛域：对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$，考虑 $\zeta=\dfrac{1}{z-a}$，因此其收敛半径为 $\dfrac{1}{r}$，即 $|z-a|>r$.
对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$，其收敛半径记为 R，那么罗朗级数收敛域为[16]

$$r<|z-a|<R,\quad r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{-n}}{a_{-(n+1)}}\right|,\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

3. 设 $f(z)$ 在圆环域 $D: r<|z-a|<R$ 中解析，则 $f(z)$一定能在 D 中展开成 Laurent 级数，即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

而 C 是 D 内围绕 a 的任意闭路.

证 思路 利用解析函数的积分表示导出其级数表示.
对 D 内任一点 z，作以 a 为圆心的圆周 C_1,C_2，使得 a 介于两者之间，不妨假定 C_1 半径小于 C_2. 由复闭路的柯西积分公式[17]，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2-C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

(1) 当 $\zeta\in C_2$ 时，$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|=q_1<1$，那么

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,$$

且该幂级数在 C_2 上一致收敛，故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

[16]当 $r>R$ 时，由 Abel 定理，Laurent 级数的两部分在全平面均发散；当 $r=R$ 时，级数至多只在 $|z-a|=R$ 上有限个点收敛

[17]课本未提及

(2) 当 $\zeta \in C_1$ 时，$\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right| = q_2 < 1$，那么

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n \xlongequal{-(n+1)\to n} -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

且该幂级数在 C_1 上一致收敛，故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a} &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_1} f(\zeta)\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = -\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n,\end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

综合上述结果，$f(z)$ 可表示成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n - \left[-\sum_{-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

现对于任一包围 a 的闭路 C，由多连通域的 Cauchy 积分定理，

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

因此最终 $f(z)$ 表示为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

4. Laurent 级数具有唯一性：利用

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$$

的正交性，可知若

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-a)^n,$$

那么结合 Laurent 级数在收敛域内的一致收敛性，

$$\begin{aligned}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^k}\,\mathrm{d}z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{k-n}} = a_k,\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{k-n}} = b_k,\end{aligned}$$

即对于 $\forall k\in\mathbb{Z}$，均有 $a_k = b_k$，因此两种展开完全相等.

5. **Bessel 函数** 设 t 为实参数，则函数

$$f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

在 $0<|z|<\infty$ 内的 Laurent 展开为 Bessel 函数.

解法 1 $f(z)$ 在除 $z=0$ 以外的全平面上解析，那么取积分路径 $C:|z|=1$，直接计算得

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\xlongequal{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\exp\left[\frac{t}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right]\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t\sin\theta-n\theta)}\,\mathrm{d}\theta\xlongequal{\varphi=2\pi-\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-t\sin\varphi-2n\pi+n\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t\sin\varphi-n\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t\sin\theta-n\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t\sin\theta-n\theta)}\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\,,
\end{aligned}$$

则 $f(z)$ 的 Laurent 展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,z\neq0)$.

解法 2 将 $f(z)$ 拆分为两项相乘并分别用 Taylor 展开. 注意到 e^z 的展开式在全平面一致收敛，因此

$$\begin{aligned}
f(z)&=\exp\left(\frac{t}{2}z\right)\cdot\exp\left(-\frac{t}{2}\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^kz^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{t}{2}\right)^l\left(-\frac{1}{z}\right)^l\\
&=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{k!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+l}z^{k-l}\xlongequal{n=k-l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}z^n\\
&\xlongequal{n+l\geqslant0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}\right]z^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}\right]z^n\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)z^n,
\end{aligned}$$

其中当 $n\in\mathbb{N}$ 时，

$$\begin{aligned}
J_n(t)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n},\\
J_{-n}(t)&=\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}\\
&\xlongequal{m=n+l}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}}{m!(m-n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}
\end{aligned}$$

5.5 解析函数的孤立奇点

1. 定义：如果函数 $f(z)$ 在 a 某个邻域：$|z-a|<\rho$ 内除 a 点外都是解析的，则称 a 是 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 此时由上一节的讨论，$f(z)$ 在圆环 $0<|z-a|>\rho$ 内可以展成 Laurent 级

数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

此为 $f(z)$ 在孤立奇点 a 的 Laurent 展开，其中 $(z-a)$ 负幂次项称为此级数的**主要部分**，正幂次项称为此级数的**正则部分**.

(1) 当 $n=-1,-2,\cdots$ 时，$a_n=0$，此时 Laurent 展开中只有正则部分，因而此孤立奇点 a 为**可去奇点**.

i. 定理：设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，那么 a 是 $f(z)$ 的可去奇点的充分必要条件是：$\exists\rho>0$，使得 $f(z)$ 在环域：$0<|z-a|<\rho$ 内有界.

ii. 推论：设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，那么 a 是 $f(z)$ 的可去奇点的充分必要条件是：$\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$ 且 a_0 有限.

(2) 设 $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 展开式的主要部分只有有限多个（至少一个）不为 0 的项，设 a_{-m} 是 $f(z)$ 是 $f(z)$ 的 Laurent 展开式中从左数第一个不为 0 的系数，即

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_{-m}\neq 0,$$

此时称 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点.

i. 定理：设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点与下面两种说法等价：

A. $f(z)$ 在某环域内可表示为

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi(a)\neq 0$.

B. a 是函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

ii. 推论：$f(z)$ 的孤立奇点 a 为奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

(3) 如果 $f(z)$ 的 Laurent 展开的主要部分含有无穷多项，则称 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.
定理：a 为 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件是：不存在极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

2. 如果 $f(z)$ 在 ∞ 点的某邻域（即 $R<|z|<+\infty$）内解析，则 ∞ 称为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 对 $f(z)$ 作变换 $\zeta=1/z$，则有 $\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$，其收敛域为 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$，那么 $\varphi(\zeta)$ 在其中的 Laurent 展开为

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,$$

那么 $f(z)$ 在 ∞ 点的 Laurent 展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{-n}z^n.$$

(1) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow$ 其展开式不含 z 的正幂次项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 有限.

(2) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点 $\Longleftrightarrow$ 其展开式中只有有限个（至少一个）正幂次项，且最高次幂为 $m\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

(3) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\Longleftrightarrow$ 其展开式中含有无限多个正幂次项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在.

6 留数及其应用

6.1 留数定理

1. 定义：设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 a 的充分小的邻域内一条把 a 点包含在其内部的闭路，积分
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$
称为 $f(z)$ 在 a 点的**留数**或**残数**，记作 $\mathrm{Res}[f(z),a]$.

2. **留数定理** 如果函数 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 的内部除去 n 个孤立奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外也解析，则
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$$

3. 函数 $f(z)$ 在 a 点的留数等于 $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 展开的负一次幂，即
$$\mathrm{Res}[f(z),a] = a_{-1}.$$

(1) 推论 1：设 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则
$$\mathrm{Res}[f(z),a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

(2) 推论 2：设 $P(z),Q(z)$ 均在 a 点解析，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0, Q'(a)\neq 0$，则
$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right] = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证 (1) 由题意，记 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且非零，故
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),a] &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(a)\\ &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].\end{aligned}$$

(2) 由推论 1，$z=a$ 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的 1 级极点，因此
$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right] = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

6.2 积分计算

6.2.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 型积分

记 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 为关于 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则有
$$R(\cos\theta,\sin\theta) = R\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right) = R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

为 z 的有理函数，故原积分变为一有理函数在单位圆周上的积分.

1. **Poisson 积分** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2},\quad 0<p<1.$

   应用此变换：$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$. 记积分路径 $C:|z|=1$ 且为正向，那么

   $$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-p(z+1/z)+p^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(1+p^2)z-(1+pz^2)}\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(1-pz)(z-p)},\end{aligned}$$

   因此函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-pz)(z-p)}$ $(0<p<1)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内有且仅有 $a=p$ 这一零点，故

   $$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{1/(1-p\cdot p)}{1}=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

2. 对有限区间 (a,b)，计算积分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，通常需要补充一条曲线 l，使其与直线段 $[a,b]$ 围成一个区域 D. 作复变函数 $f(z)$，使其在 D 的边界与其内除去有限个极点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外的点均解析，那么由留数定理

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_l f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$$

6.2.2 有理函数 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

1. 设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是一个有理函数，并且为使该广义积分收敛，假定$Q(x)$ 在实轴上无零点且比 $P(x)$ 至少高两次.

2. 定义：对于某些函数 $f(x)$，可能广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在，但极限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$ 存在，那么称该极限值为此广义积分的 **Cauchy 积分主值**，记作

   $$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

   显然，当广义积分收敛时，其积分主值也存在且两者相等.

3. 重要引理

   (1) 如果当 R 充分大时，$f(z)$ 在圆弧 $C_R:z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 上连续，且 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$，那么

   $$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

   特别地，当 $f(z)$ 是有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 且 $Q(z)$ 比 $P(z)$ 至少高两次时，有

   $$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z=0.$$

一般地说，当有理函数 $R(z)$ 满足前述条件[18]时，此复有理函数在全平面有至多有限个极点，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $R(z)$ 位于上半平面的全部极点. 取辅助闭路 $C = C_R + [-R, R]$，当 R 充分大时，$a_1, a_2, \cdots a_n$ 都在 C 内，由留数定理，

$$\int_C R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z), a_k] = \int_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} R(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

结合此引理，令 $R \to \infty$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z), a_k].$$

4. 如果当 ρ 充分小时，$f(z)$ 在圆弧 $C_\rho : z = a + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 上连续，且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = k,$$

则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta-\alpha)k.$$

在积分计算中，常遇到 $k = 0$ 这一特殊情形.

推论 设 a 是 $f(z)$ 的 1 级极点，则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta-\alpha)\mathrm{Res}[f(z), a].$$

5. **约当引理** 如果当 R 充分大时 $g(z)$ 在圆弧 $C_R : |z| = R, \mathrm{Im}(z) > -a$ $(a > 0)$ 上连续，且

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

则对 $\forall\lambda > 0$ 都有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

（证明待补充）

6.2.3 $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$ $(m > 0)$ 型的积分

设 $R(z)$ 是有理函数，分母比分子至少高一次，$R(z)$ 在实轴上除有限个单极点$x_1, x_2, \cdots, x_l$ 外处处解析，那么

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = I_1 + \mathrm{i}I_2.$$

引入辅助函数

$$F(z) = R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},$$

[18] 实轴无零点，分母比分子至少高两次

那么取 C 为上面平面内分别以实轴上各奇点为圆心的小半圆周 $-C_{ri}$（反向）、以原点为圆心的大半圆周 C_R 与实轴的连线，由留数定理，

$$\begin{aligned}\int_C F(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\int_{C_{ri}} F(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{i=0}^{n}\int_{x_i+r}^{x_{i+1}-r} F(z)\,\mathrm{d}z\,,\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k].\end{aligned}$$

其中已记 $x_0=-(R+r), x_{n+1}=R+r$，而 $\lim\limits_{z\to\infty}R(z)=0$ 且 $m>0$，由约当引理，

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z = \lim_{z\to\infty}\int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

由引理 2，$\int_{C_{ri}} F(z)\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[F(z),x_i]$，因此令 $R\to\infty, r\to 0$，可得

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k\right] + \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},x_k\right].$$

6.2.4 $\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x$ 型的积分

这里 $R(z)$ 是一个在正实轴上没有奇点的偶有理函数，且分母比分子至少高两次．取回路为 $C_R:|z|=R$、$C_r:|z|=r$ 与实轴连线．

在 C_r 上，由于

$$|\ln z| = |\ln r + \mathrm{i}\theta| = \sqrt{(\ln r)^2+\theta^2} \leqslant \sqrt{(\ln r)^2+\pi^2},$$

那么

$$\left|\int_{C_r} R(z)\ln z\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^{\pi} |R(z)|\sqrt{(\ln r)^2+\pi^2}\cdot r\,\mathrm{d}\theta$$

当 $r\to 0$ 时，$|R(z)|$ 为常数，而 $\lim\limits_{r\to 0} r\ln r = 0$，因此积分值为 0.

在 C_R 上，由于

$$|\ln z| = \sqrt{(\ln R)^2+\theta^2} \leqslant \sqrt{(\ln R)^2+\pi^2},$$

那么

$$\left|\int_{C_R} R(z)\ln z\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^{\pi} |R(z)|\sqrt{(\ln R)^2+\pi^2}R\,\mathrm{d}\theta\,,$$

因为分母比分子至少高两次，故

$$\lim_{R\to\infty} R(z)\ln R\cdot R = \lim_{R\to\infty} C\cdot\frac{1}{R} = 0,$$

因此积分值为 0.

在实轴上，$z=x$，故

$$\int_{-R}^{-r} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=-x} \int_r^R R(u)(\ln u+\mathrm{i}\pi)\,\mathrm{d}u = \int_r^R R(x)\ln x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_r^R R(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

综上，令 $r\to 0, R\to\infty$，由留数定理，原积分可写为

$$\begin{aligned}\int_C R(z)\ln z\,\mathrm{d}z &= 0+0+2\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z)\ln z, a_k],\end{aligned}$$

取上述等式的实部，可得

$$\int_0^{\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\ln z,a_k]\right\}.$$

6.2.5 $\int_0^{\infty} x^p R(x)\,\mathrm{d}x$ 型的积分

这里要求实数 p不是整数，$R(z)$ 是一个在正实轴上没有奇点的有理函数，且要求

$$\lim_{z\to\infty} z^{p+1}R(z)=0,\quad \lim_{z\to 0} z^{p+1}R(z)=0.$$

取支割线为正实轴，由此取回路为 $C_R:|z|=R$、$C_r:|z|=r$ 分别与正实轴上岸、下岸的连线.

在 C_R, C_r 上，由条件及引理可知，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^pR(z)\,\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{r\to 0}\int_{C_r} z^pR(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

在正实轴下岸，$z=x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$，因此积分为

$$\int_R^r (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^pR(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\int_r^R x^pR(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

由留数定理，令 $R\to\infty, r\to 0$，可得

$$\int_0^{\infty} x^pR(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pR(z),z_k],$$

其中 z_k 为函数 $z^pR(z)$ 在全平面内的奇点.

6.3 辐角原理

1. 设 a,b 分别是函数 $f(z)$ 的 m 级零点与 n 级极点，则 a,b 都是 $f(z)$ 的一级极点，且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m,\quad \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n.$$

2. 设 $f(z)$ 在闭路 C 的内部可能有有限多个极点，除去这些极点外，$f(z)$ 在 C 及其内部解析，且在 C 上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N-P.$$

其中 N,P 分别表示 $f(z)$ 在 C 的内部的零点和极点的总数（约定每个 k 级零点或极点算 k 个零点或极点）.

3. **辐角原理** 在上一定理的条件下，有

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

4. **儒歇 (Rouché) 定理** 设函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有不等式

$$|f(z)| > |\varphi(z)|,$$

则在 C 的内部 $f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 的零点个数相等.

5. 设多项式

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

在虚轴上无零点，如果当点 z 自下而上沿虚轴从 $-\infty$ 点走向 ∞ 点的过程中绕原点转了 k 圈，即

$$\Delta_{y(-\infty\to\infty)} \arg P(\mathrm{i}y) = 2k\pi,$$

则 $P(z)$ 在左半平面内共有 $(k+n/2)$ 个零点.

7 解析开拓

7.1 唯一性定理和解析开拓的概念

1. **唯一性定理** 如果区域 D 内的两个解析函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在一串互不相同的点列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$$

上的值相等，并且这个点列以D 内某点 a为极限，那么这两个函数在 D 内恒等，即 $f(z) \equiv g(z)$ $(z \in D)$.

2. **推论**

(1) 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 都在区域 D 内解析，且在 D 的某一段曲线上它们的值相同，则这两个函数在 D 内恒等.

(2) 设在实数轴上有恒等式 $f(x) \equiv g(x)$，$f(z)$ 与 $g(z)$ 在全平面内解析，且在实轴上分别与 $f(x), g(x)$ 相一致，则对一切复数 z，有 $f(z) \equiv g(z)$.

3. 设 $f(z)$ 在集合 E 上有定义，D 是一个包含 E 的更大的区域，如果存在 D 内的解析函数 $F(z)$，使得当 $z \in E$ 时，有 $F(z) = f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在区域 D 的**解析开拓**.

4. 设函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内解析，D_2 是另一个区域，D_1 与 D_2 相交于另一个区域 D. 如果存在一个在区域 D_2 解析的函数 $f_2(z)$，且在 D 内有 $f_1(z) = f_2(z)$，则 $f_2(z)$ 称为 $f_1(z)$ 在区域 D_2 内的**直接解析开拓**；反之 $f_1(z)$ 也是 $f_2(z)$ 在 D_1 内的直接解析开拓. 两者称为互为直接解析开拓.

7.2 含复参变量积分及 Γ 函数

1. **柯西积分** 设 C 是平面上一条逐段光滑的有限长（封闭或不封闭）曲线，$f(\zeta)$ 是沿 C 确定的一个连续函数，则当 z 不在曲线 C 上时，含复参变量 z 的积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

是解析函数，且

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \, .$$

2. 设 $f(t, z)$ $(t \in \mathbb{R})$ 是 t, z 的连续函数，这里 $a \leqslant t \leqslant b$，$z$ 在区域 D 内，且对于 $\forall t \in [a, b]$，$f(t, z)$ 在 D 内解析，则

$$F(z) = \int_a^b f(t, z) \, \mathrm{d}t$$

是 D 内的解析函数，且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \, \mathrm{d}t \, .$$

3. 设

8 保形变换及其应用

8.1 导数的几何含义

1. **保角性** 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $z_0\in D, f'(z_0)\neq 0$. 在 D 内作一条过 z_0 的有向简单光滑曲线$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$. 设 $z'(t)\neq 0$，并记 $z(t_0)=z_0\ (a\leqslant t_0\leqslant b)$，因此 C 在 z_0 处的切向量为

$$z'(t_0)=x'(t_0)+\mathrm{i}y'(t_0),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其与实轴夹角为 $\arg z'(t_0)$. 而 $w=f(z(t))$ 在 t_0 点的切向量为

$$w'(t_0)=f'(z(t_0))z'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0),$$

其与实轴的夹角为 $\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$. 可见对于过 z_0 点的任一曲线，经变换后与原曲线在该点切线夹角**恒为** $\arg f'(z_0)$.

2. 导数模的几何意义：定义

$$|f'(z_0)|\xlongequal{\Delta}\lim_{z\to z_0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$$

为曲线 C 受到变换后在 z_0 的**伸张系数**.

8.2 保形变换的概念

用解析变换解决实际问题时，要求所使用的变换是**双方单值**的.

1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的单值函数，则在 D 内的任一点 z，$f'(z)\neq 0$.

2. **保形变换** 区域 D 内单叶函数所确定的变换. 设变换 $T_1: v=f(z)$，变换 $T_2: w=g(v)$，因此 $w=g(f(z))$ 相当于一个新变换 T_2T_1[19]. 可见**保形变换的乘积仍是保形变换**.

3. 保形变换的基本问题：已知两个区域 D,G，能否找到一个双方单值的保形变换，把 D 变成 G.
思路：若能找到将 D 变为单位圆内部的变换即可，因为 $D\xrightarrow{T}|\xi|<1$ 且 $G\xrightarrow{S}|\xi|<1$，那么 $D\xrightarrow{S^{-1}T}G$.

4. 区域 D 满足的条件：

   (1) D 不能是多连通区域.

   (2) D 不可能是闭复平面或开复平面，

   证 若 D 为闭复平面或开复平面，那么 $f(z)$ 在圆 $|w|<1$ 内，则 $|f(z)|\leqslant 1$. 由 Liouville 定理，$f(z)\equiv\mathrm{const}$，但这是显然不正确的.

   (3) D 不能是去掉一个点 a 的闭复平面.

[19] 有次序，表示依次作变换 T_1, T_2

证 假定 $w=f(z)$ 将 D 变为圆域 $|z|<1$，那么保形变换 $z=a+\dfrac{1}{\xi}$ 将 ξ 的开复平面变换为 D，则 $w=f\left(a+\dfrac{1}{\xi}\right)$ 将 ξ 的开复平面变为 D. 由上一条可知，这是不可能的.

综上，若存在保形变换将 D 变为圆域 $|w|<1$，那么 D 是一个**边界至少包含两个点**[20]**的单连通区域**.

5. **黎曼定理** 如果 D 是闭复平面上的一个边界至少包含两个点的单连通区域，则必存在单叶函数 $w=f(z)$ 把 D 变为圆域 $|w|<1$. 如果还要求把 D 中的一个已知点 z_0 变为单位圆域内一指定点 w_0，过该点的已知方向，即要求

$$f(z_0)=w_0,\quad \arg f'(z_0)=\alpha_0,$$

则这个变换是唯一的.

8.3 分式线性变换

1. 定义：由函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

所确定的变换称为**分式线性变换** M，这里，a,b,c,d 是复常数，且 $ad-bc\neq 0$[21]. 当 $c=0$ 时，M 称为**整线性变换** $L:w(z)=\alpha z+\beta$. 并且其规定 $w(\infty)=\dfrac{a}{c}$，$w\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$.

2. 如果 $t=\dfrac{1}{f(z)}$ 或 $t=\dfrac{1}{f(1/\zeta)}$ 把 $z=z_0$ 或 $\zeta=0$ 的一个邻域**保形**映照成 $t=0$ 的一个邻域，则称 $w=f(z)$ 把 $z=z_0$ 或 $z=\infty$ 的一个邻域保形映照成 $w=\infty$ 的一个邻域.

3. 任意一个分式线性函数 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 给出一个由闭z 平面到闭w 平面的的双方单值的保形变换.

4. 特殊的线性变换：

(1) **平移变换** $T:w=z+b$.

(2) **旋转变换** $R:w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ $(\theta\in\mathbb{R})$.

(3) **相似变换** $S:w=rz$ $(r>0)$.

(4) **倒数变换** $I:w=\dfrac{1}{z}$.

任何一个分式线性变换都可以表成上述四类变换的乘积.

5. **保圆性** 分式线性变换把圆周（含直线）变为圆周[22].

[20] 这里 ∞ 点视为一个点

[21] 否则 $w\equiv\text{const}$，因 $w'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. 可见当 $ad=bc$ 时，$w'(z)=0$

[22] 证明四种基本变换具有此性质即可

6. 设已给圆周 $C:|z-z_0|=R\ (0<R<\infty)$，如果两个有限点 z_1,z_2 在自 z_0 出发的一条射线上，且

$$|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2,$$

则称 z_1,z_2 关于圆周 C **对称**.
常见对称点：圆心与 ∞ 点、C 为实轴时的一对共轭复数.

7. 两点 z_1,z_2 关于圆周 C 对称的充要条件是：过 z_1,z_2 的任何圆与 C 直交.

8. **分式线性变换把对某一圆周为对称的点变为对这个圆周的像圆周对称的点.**

9. 任给 z 平面上三个不同点 $z_!,z_2,z_3$ 和 w 平面上三个不同点 w_1,w_2,w_3，存在一个唯一的分式线性变换：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

分别将 z_1,z_2,z_3 变换成 w_1,w_2,w_3.

10. 设 $w=w(z)$ 是一分式线性变换，且 $w(z_1)=w_1,w(z_2)=w_2$，则此线性变换可表示为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

其中 k 为复常数. 特别地，若 $w(z_1)=0,w(z_2)=\infty$，则有

$$w(z)=k\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

此后根据变换前后的圆周方程关系[23]

8.4 初等函数的映照

通常我们总是要求一个保形变换，把某一给定的区域变成上半平面或单位圆（复平面内最简单的区域）.

8.4.1 变换 $w=z^n$ 和 $w=\sqrt[n]{z}\ (n\geqslant 2)$

注意到

$$\alpha<\arg z<\beta,\ \beta-\alpha\leqslant\frac{2\pi}{n}\xrightarrow{w=z^n}n\alpha<\arg w<\beta,$$

特别地，

$$\text{角域}0<\arg z<\frac{\pi}{n}\xrightarrow{w=z^n}\text{上半平面}\mathrm{Im}w>0,$$
$$\text{角域}0<\arg z<\frac{2\pi}{n}\xrightarrow{w=z^n}\text{去掉正实轴的全平面}.$$

对于根式线性变换，在做具体的保形变换时，最常用的是第 0 支：$w=\sqrt[n]{z}$，$w(1)=1$. 特别地，若取正实轴为支割线，第 0 分支 $w=\sqrt{z}$ 将区域 D 保形映照成上半 w 平面.
此外，在保形变换中还常用到分式幂函数 $w=z^{m/n}$，其中 m/n 是既约分数.

[23] 多为模长关系，如 $\mathrm{Im}(z)>0$ 变为 $|w|<1$

8.4.2 变换 $w=\mathrm{e}^z$ 和 $w=\mathrm{Ln}z$

对于指数变换，

$$\text{条形域}a<\mathrm{Im}(z)<b,\ b-a\leqslant 2\pi \xrightarrow{w=\mathrm{e}^z} \text{角域}a<\arg w<b,$$

特别地，

$$\text{条形域}0<\mathrm{Im}(z)<\pi \xrightarrow{w=\mathrm{e}^z} \text{上半}w\text{平面}.$$

对于对数变换，通常取 $n=0$ 的一支，即

$$\text{角域}a<\arg z<b \xrightarrow{w=\ln z} \text{条形域}a<\mathrm{Im}(w)<b.$$

8.4.3 儒可夫斯基变换

即变换

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\quad (z\neq 0).$$

常用于

单位圆内部 $\xrightarrow{w}$ w平面除去线段 [-1, 1] 的区域,

上半单位圆内部 $\xrightarrow{w}$ 下半w平面,

下半单位圆内部 $\xrightarrow{w}$ 上半w平面.

9 拉氏变换

拉氏变换的定义

1. 引入：已知实函数 $f(x)$ 逐段光滑且在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积时存在 Fourier 变换：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x\,,$$

反变换类似，但考虑到：

(1) 在研究实际过程时，通常从某一时刻开始，因此设单位阶跃函数

$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 1,\end{cases}$$

所研究的函数变为 $f(t)h(t)$.

(2) 对于复函数 $f(t)$，绝对可积的条件太强，诸如三角函数、指数函数、幂函数等函数均不满足，因此添加一个衰减因子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ $(t>0)$.

记 $p=\sigma+\mathrm{i}s$，最终得到所研究函数的变换：

$$\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. 定义：设 $f(t)$ 是实变量 t的实值函数或复值函数，当 $t<0$ 时 $f(t)=0$. 若含复参变数 p 的积分 $\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在 p 的某个区域内收敛，则由此积分所确定的函数

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

称为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**（简称**拉氏变换**）或**像函数**，简记为

$$F(p)=L[f(t)].$$

而 $f(t)$ 则称 $F(p)$ 的**拉氏变换**或**本函数**，记为 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

注 由以上讨论可知，$f(t)$ 拉氏变换就是 $f(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换.

3. 附加条件：

(1) $f(t)$ 在 t 轴上的任何有限区间上**逐段光滑**.

(2) $f(t)$ 是指数增长型的，即 $\exists K,c>0$，使得对 $\forall t\geqslant 0$，有 $|f(t)|\leqslant K\mathrm{e}^{ct}$.

4. 若 $f(t)$ 满足以上条件，则像函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(p)>c$ 上有意义，而且是一个解析函数. 且此时有不等关系：

$$\int_0^{\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\infty}K\mathrm{e}^{-(\sigma-c)t}\,\mathrm{d}t=\frac{K}{\sigma-c}.$$

由此可见 $\lim\limits_{\sigma\to\infty} F(p)=0$，即当 p 限制在角域

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\quad \forall\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

内趋于无穷时，$F(p)\to 0$.

5. 重要拉普拉斯变换

(1) 正变换：$L[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{p-a}$，反变换：$L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-a}\right]=\mathrm{e}^{at}$，其中 a 为实（复）常数.

(2) 正变换：$L[t^{\alpha}]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$，其中 α 为复常数且 $\mathrm{Re}(\alpha)>-1$. 特别地，

$$L[h(t)]=\frac{1}{p},\quad L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}\ (n\in\mathbb{N}^*),\quad L\left[\sqrt{t}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}},\quad L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

(3) 正变换[24]：

$$\begin{aligned}L[\cos\omega t]&=\frac{p}{p^2+\omega^2},\quad L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\\ L[\cosh t]&=\frac{p}{p^2-\omega^2},\quad L[\sinh t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.\end{aligned}$$

证 i. 由于 $|\mathrm{e}^{at}|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(a)t}$，可见其增长指数为 $\mathrm{Re}(a)$，因此像函数在 $\mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(a)$ 内解析，且

$$L[\mathrm{e}^{at}]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p-a)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p-a}.$$

ii. 任取 $c>0$，当 $\sigma=\mathrm{Re}(p)\geqslant c$ 时，

$$\int_0^{\infty}\left|t^{\alpha}\mathrm{e}^{-pt}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\infty}t^{\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{e}^{-ct}}\,\mathrm{d}t,$$

由于不等号右侧积分收敛，故该积分一致绝对收敛. 先假定 p 为正实数，即 $p=\sigma$，那么

$$F(\sigma)=L[t^{\alpha}]=\int_0^{\infty}t^{\alpha}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\xlongequal{x=\sigma t}\frac{1}{\sigma^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sigma^{\alpha}}.$$

利用解析开拓，可将 $F(\sigma)$ 唯一地开拓成 $\mathrm{Re}(p)>0$ 上的解析函数

$$F(p)=L[t^{\alpha}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

iii. 利用下一节的拉式变换的线性性可知，

$$\begin{aligned}L[\cos\omega t]&=L\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right)\\&=\frac{p}{p^2+\omega^2},\end{aligned}$$

其余积分类推.

[24] 利用下一节的拉式变换的线性性证明

9.1 拉式变换的基本性质

9.1.1 线性关系

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)].$$

9.1.2 相似定理

设 $L[f(t)]=F(p)$，则对于 $\forall\alpha>0$，有

$$L[f(\alpha t)]=\int_0^\infty f(\alpha t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\xlongequal{x=\alpha t}\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{px/\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big).$$

9.1.3 本函数的微分法

设 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$\begin{aligned}L[f'(t)]&=\int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\left.f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\\&=pF(p)-f(+0),\end{aligned}$$

其中已利用 $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}|\leqslant\mathrm{e}^{-(\sigma-c)t}$ 且 $\mathrm{Re}(p)>c$，这可推出 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}=0$.

推论 若 $f(t),f'(t),\cdots,f^{(n)}(t)$ 均可作拉氏变换，那么

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0).$$

9.1.4 本函数的积分法

设 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$\begin{aligned}L\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]&=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}u\int_u^\infty\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{p}\int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u=\frac{F(p)}{p}.\end{aligned}$$

9.1.5 像函数的微分法

若 $f(t)$ 可作拉氏变换，则

$$F'(p)=-\int_0^\infty tf(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=L[-tf(t)]=-L[f(t)],$$

更一般地，$F^{(n)}(p)=L[(-1)^nt^nf(t)]=(-1)^nL[t^nf(t)]$.

9.1.6 像函数的积分法

若 $f(t)$ 可作拉氏变换，其像函数的积分在 $\int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z$ 收敛[25]中，且当 $t\to 0$ 时，$\left|\dfrac{f(t)}{t}\right|$ 有界，那么[26]

$$\begin{aligned}\int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z &= \int_p^\infty \mathrm{d}z\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t\int_p^\infty \mathrm{e}^{-tz}\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = L\left[\frac{f(t)}{t}\right].\end{aligned}$$

推论 如果积分 $\int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ 存在，那么

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p\,.$$

9.1.7 延迟定理

对于函数 $f(t-\tau)h(t-\tau)$，设 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$L[f(t-\tau)] = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-\tau} \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-p(u+\tau)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-p\tau}F(p).$$

9.1.8 位移定理

设 $L[f(t)]=F(p)$，则对任意复常数 λ，有

$$L[\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(p-\lambda)t}\,\mathrm{d}t = F(p-\lambda).$$

由此可得在拉氏反变换中的常用公式：

$$\begin{aligned}L[\mathrm{e}^{\lambda t}t^n] &= \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\\ L[\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\lambda t] &= \frac{\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2},\\ L[\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\lambda t] &= \frac{p}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

[25] 积分路线在 $\mathrm{Re}(p)>c$

[26] 由此可知，

$$\begin{aligned}L\left[\frac{\sin t}{t}\right] &= \int_p^\infty \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}-\arctan p,\\ L[\mathrm{Si}(t)] &= \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan p\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 称为**正弦积分函数**.

9.1.9 周期函数的像函数

设 $f(t)$ 是 $[0,\infty)$ 内以 T 为周期的函数，且 $f(t)$ 仲裁一周期内逐段光滑，则

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(t+nT)\mathrm{e}^{-p(t+nT)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-npT}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

其中已利用 $\mathrm{Re}(p)>0$ 时，$\left|\mathrm{e}^{-pT}\right| = \mathrm{e}^{-\sigma T} < 1$.

9.1.10 卷积定理

1. 定义：如果已知函数 $f(x)$ 及 $g(x)$，则含参变量的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**卷积**，记为 $f*g$. 而在拉氏变换中，卷积定义为

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)h(t)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

2. 性质：

(1) 交换律：$f*g = g*f$.

(2) 结合律：$f*(g*h) = (f*g)*h$.

(3) 分配率：$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$.

3. **卷积定理** 设 $f_1(t), f_2(t)$ 均可作拉氏变换，则

$$\begin{aligned} L[f_1*f_2] &= F[(f_1*f_2)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}] = F\{[f_1(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]*[f_2(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\} \\ &= F[f_1(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\cdot F[f_2(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}] = L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)]. \end{aligned}$$

其中 $F[f]$ 表示 f 的傅里叶变换.

9.2 由像函数求本函数

9.2.1 部分分式法

对于有理真分式函数 $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$，可将其分解为若干个最简分式的和.

9.2.2 拉氏变换的反演公式

1. 设 $f(t)$ 可作拉氏变换，记 $L[f(t)] = F(p)$，则对 $\forall \sigma > c$，在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p\,.$$

此积分沿路径 $\mathrm{Re}(p)=\sigma$ 进行，此反演公式称为**傅里叶-梅林 (Fourier-Mellin) 公式**.

2. 设 $F(p)$ 除在半平面 $\mathrm{Re}(p)\leqslant\sigma$ 内有奇点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 外，在 p 平面内处处解析. 当 $p\to\infty$ 时，$F(p)\to 0$，且积分 $\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$ 绝对收敛，则

   (1) $F(p)$ 是函数 $\displaystyle f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$.

   (2) $\displaystyle f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k\right]$.

9.2.3 其他方法

若$F(p)$ 在 ∞ 点解析，且它在 ∞ 点的邻域内有 Laurent 展开式 $\displaystyle F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$. 将此级数逐项求本函数，可得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1},$$

该级数的收敛半径为 ∞，其定义的函数 $f(t)$ 满足不等式 $|f(t)|\leqslant K\mathrm{e}^{ct}\ (t\geqslant 0)$.
该定理的逆定理也成立，即若 $f(t)$ 可在整个数轴上展开成上述形式且 $|f(t)|\leqslant K\mathrm{e}^{ct}\ (t\geqslant 0)$，则其像函数 $F(p)$ 可用上述级数表示.

A 要点回顾

1. 不等关系：$|x|,|y|\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

2. 极限等价关系：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}z_n=z_0 &\iff \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0\\ &\iff \lim_{n\to\infty}|z_n|=|z_0|,\quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Arg}\ z_n=\mathrm{Arg}\ z_0.\end{aligned}$$

3. $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|)$.

4. C-R 方程：$\displaystyle\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 由此可推出：

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\\ &=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

5. 指数函数 $w(z)=\mathrm{e}^z$ 的性质：

   (1) $|w|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)},\ \arg w=\mathrm{Im}(z)$.

   (2) 条形域 $a<\mathrm{Re}(z)<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$ 圆环域 $\mathrm{e}^a<|w|<\mathrm{e}^b$.

   (3) 条形域 $a<\mathrm{Im}(z)<b\xrightarrow{w=\mathrm{e}^z}$ 角域 $a<\arg w<b$.

6. 复三角函数的模 $|\sin z|,|\cos z|$ 无界.

7. $\cos(\mathrm{i}y)=\cosh y,\ \sin(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sinh y.$

8. 对于无理数或一般复数 α，z^{α} 有无穷多值.

9. 多连通区域的柯西定理：

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

10. Cauchy 积分公式：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

11. 解析函数的性质：

(1) 平均值公式：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi R}\displaystyle\int_C f(\zeta)|\mathrm{d}z|.$

(2) 最大模原理（若非零，取倒数可证“最小模原理”）.

(3) Cauchy 不等式：$\left|f^{(n)}(z)\right|\leqslant\dfrac{n!M(R)}{R^n}$，其中 $|\zeta-z|<R.$

(4) Liouville 定理：若整函数 $f(z)$ 在全平面上有界，则 $f(z)$ 为复常数.

注 若 $u(z)$ 有界，取 $\left|\mathrm{e}^{f(z)}\right|=\mathrm{e}^{u(z)}$，可证 $f(z)$ 为复常数.

(5) 代数学基本定理：$f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ 必有零点.

(6) Morera 定理：对任意曲线满足 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，则 $f(z)$ 解析.

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}z_k$ 收敛 $\Longleftrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k,\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ 均收敛.

13. 绝对收敛级数：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}z_{1k}=A,\sum_{k=1}^{\infty}z_{2k}=B$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}z_{1k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}z_{2k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(z_{1k}z_{2k})=AB.$$