复变函数 2020-2021 期末试题解答

邓嘉驹

更新：December 21, 2023

一、填空题

1. $\operatorname{Ln}[(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}] = \mathrm{i}(2k\pi + \pi/4)\ (k \in \mathbb{Z})$.
2. 记 $w = 1/z = u + \mathrm{i}v$，其中 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $x = u/(u^2+v^2), y = -v/(u^2+v^2)$，方程化为：

$$1 = |z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{u}{u^2+v^2} - 1\right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} = 1 + \frac{1-2u}{u^2+v^2}, \tag{1}$$

即 $u = 1/2$，为 w 平面上的直线 $\operatorname{Re} w = 1/2$.

注 z 平面上稍复杂的曲线变换到 w 平面上时，通常采用反解的方法.

3. 记 $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = my^3 + nx^2y, v(z) = \operatorname{Im} f(z) = x^3 + lxy^2$. 由于 $f(z)$ 解析，故 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$u_x = 2nxy = v_y = 2lxy, \quad u_y = 3my^2 + nx^2 = -v_x = -3x^2 - ly^2, \tag{2}$$

从中解得 $m = 1, n = l = -3$.

4. 由于 $w = f(z)$ 解析，且 $\operatorname{Re} w > 0$，即 $|w| \geqslant |\operatorname{Re} w| > 0$，则 $\ln f(z) = \ln|f(z)| + \mathrm{i}\arg f(z)$ 也解析，从而其虚部 $\arg f(z)$ 为调和函数.

注 回忆第四章第 2 题第 (1) 问：已知 $f(z)$ 解析证明 $\ln|f(z)|$ 调和.

5. 由于 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程，故

$$\begin{aligned} v(x,y) &= v(0,0) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v(0,0) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} -u_y\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y \\ &= v(0,0) + \int_0^x -2021\,\mathrm{d}a + \int_0^y -2x\,\mathrm{d}b = v(0,0) - 2021x - 2xy. \end{aligned} \tag{3}$$

6. 由题意，$R = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$，因此新级数收敛半径

$$R' = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{R}{2}. \tag{4}$$

7. 显然 $z = 2$ 为本性奇点，$1 - \mathrm{e}^{-z}$ 的全部零点为 $2k\pi\mathrm{i}\ (k \in \mathbb{Z})$. 由于 $1 - \mathrm{e}^{-z} \sim z\ (z \to 0)$，故 $z = 0$ 为 2 阶极点，其余奇点 $2k\pi\mathrm{i}\ (k \in \mathbb{Z}$且$k \neq 0)$ 均为单极点.

8. 将 $z^3\cos[1/(z-2)]$ 在 $z=2$ 附近作 Laurent 展开：

$$z^3\cos\frac{1}{z-2}=[(z-2)^3+6(z-2)^2+12(z-2)+8]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z-2)^{2n}}. \tag{5}$$

由于 cos 展开式中仅含偶数次项，$1/(z-2)$ 的系数即该函数在 2 处的留数

$$\operatorname{Res}\left[z^3\cos\frac{1}{z-2},2\right]=12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\frac{1}{24}=-\frac{143}{24}. \tag{6}$$

将 $z^n\sin(1/z)$ 在 $z=0$ 附近作 Laurent 展开：

$$z^n\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k-n+1}}. \tag{7}$$

当 $2k-n+1=1$ 时，解得 $k=n/2$，因此

$$\operatorname{Res}\left[z^n\sin\frac{1}{z},0\right]=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ (-1)^{n/2}/(n+1)!, & n\text{为偶数}.\end{cases} \tag{8}$$

9. 记 $f(z)=8,\varphi(z)=2z^5-z^3+3z^2-z$，则在 $|z|=1$ 上，

$$|\varphi(z)|\leqslant 2+1+3+1=7<|f(z)|=8. \tag{9}$$

又因为 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点.

二、计算题

1. $f(z)$ 的奇点为 -1，因此收敛半径为 $R=|-1-0|=1$. 在闭域 $|z|\leqslant r<1$ 内，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}, \tag{10}$$

即该级数一致收敛于 $1/(1+z)$，因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1+z}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}, \tag{11}$$

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近的 Taylor 展开式为

$$f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n,\quad |z|<1. \tag{12}$$

注 总之写 Taylor 展开式时别忘了收敛域.

2. 将 $f(z)$ 分解后展开：

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}+\frac{-2}{z^2+1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{-z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-z^2}\right)^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}},\quad 1<|z|<2.\end{aligned} \tag{13}$$

注 Taylor 级数的乘积通常极难化简，因此通常思路是化为加减.

3. 记 Γ 为从 0 到 i 的直线段，闭路 C 为 γ 与 Γ 相连形成的正向曲线，则

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \xlongequal{z=x\ (0\leqslant x\leqslant 1)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \tag{14}$$

被积函数 $1/(1+z^2)$ 的奇点 i 和 $-\mathrm{i}$ 前者在 D 内，后者不在，即 C 所包围的区域内至多包含奇点 i. 以下分两种情况讨论：

(a). 点 i 不在 C 所围成的区域内，则由 Cauchy 积分定理，

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{\pi}{4}. \tag{15}$$

(b). 点 i 在 C 所围成的区域内，此时必定有 $C = \Gamma + \gamma^-$. 由 Cauchy 积分公式，

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}} = \pi \quad\Longrightarrow\quad \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \left(\int_\Gamma - \int_C\right)\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = -\frac{3\pi}{4}. \tag{16}$$

4. 记 C 所包围的区域为 D，则分四种情况讨论.

(a). $0, 1 \notin D$，则记此时闭路为 C_0，由 Cauchy 积分定理，

$$\int_{C_0} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{17}$$

(b). $0 \in D$ 且 $1 \notin D$，则记此时闭路为 C_1，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}. \tag{18}$$

(c). $0 \notin D$ 且 $1 \in D$，则记此时闭路为 C_2，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_{C_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(-\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)\bigg|_{z=1} = -\pi\mathrm{e}\mathrm{i}. \tag{19}$$

(d). $0, 1 \in D$，则记此时闭路为 C_3，由多连通域的 Cauchy 积分定理，

$$\int_{C_3} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right)\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = -\pi(\mathrm{e}-2)\mathrm{i}. \tag{20}$$

5. 注意到

$$\cot(z+\pi) = \frac{\cos(z+\pi)}{\sin(z+\pi)} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z+\pi)}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z+\pi)}-1} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1} = \cot z, \tag{21}$$

同时

$$\int_\pi^{2\pi} \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} \cot(x+1-2\mathrm{i}+\pi)\,\mathrm{d}(x+\pi) = \int_0^\pi \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x\,, \tag{22}$$

即 $\displaystyle\int_0^\pi \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$. 记 $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+1-2\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{4+2\mathrm{i}(x+1)}$ $(0 \leqslant x < 2\pi)$，则取正向闭曲线 $C : |z| = \mathrm{e}^4$，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_0^{2\pi} \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x = \int_C \mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \int_C \frac{z+1}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(-1+2) = 2\pi\mathrm{i}, \tag{23}$$

因此原积分为

$$\int_0^\pi \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i} = \pi\mathrm{i}. \tag{24}$$

6. 利用三倍角公式 $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ 将原积分化为：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\left.\frac{3\sin x - \sin 3x}{8x^2}\right|_0^{+\infty} + \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{25}$$

其中已利用

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3(\cos x - \cos 3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(3\sin 3x - \sin x)}{2} = 0. \tag{26}$$

记 $f(z) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}z})/z^2$，则 $f(z)$ 仅有单极点 $z = 0$：

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1}{z} - \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z} - 1}{z} = \mathrm{i} - 3\mathrm{i} = -2\mathrm{i}. \tag{27}$$

取正向闭路 C 为直线段 $L : \mathrm{Im}(z) = 0\ (r \leqslant |\mathrm{Re}(z)| \leqslant R)$ 与上半圆周 $C_R : |z| = R\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$、$C_r : |z| = r\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 的组合，则在 C_R 上，

$$|zf(z)| \leqslant \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}\right|}{R} = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-3y}}{R} \leqslant \frac{2}{R} \to 0 \quad (R \to \infty). \tag{28}$$

由引理 1，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{29}$$

在 C_r 上，前已求得 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = -2\mathrm{i}$，由引理 2，

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}\cdot(-2\mathrm{i}) = 2\pi. \tag{30}$$

令 $r \to 0, R \to \infty$，由 Cauchy 积分定理，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{r\to 0}\int_{C_r^-} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \lim_{\substack{r\to 0\\R\to\infty}}\int_L f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -2\pi + 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

由于被积函数为偶函数，故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{3\pi}{8}. \tag{32}$$

注 第一点，高次三角函数通常的处理方式是对其进行降次扩角，否则用指数形式表示很麻烦；第二点，降次扩角后通常对分母进行分部积分，以降低分母幂函数的次数；第三点，引理 1 和引理 2 的内容还是得记清楚，毕竟积分不是教材里给的几种标准积分形式任一. 反正这样处理后与第六章第 6 题第 (5) 问的后续计算基本一致了.

三、综合题

1. 由本函数的微分法与积分法，

$$L[y'(t)] = pF(p) - y(0) = pF(p), \quad L\left[\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(p)}{p}, \tag{33}$$

因此对微分方程两端作 Laplace 变换得

$$\frac{2}{p^4} = \left(p - 4 + \frac{4}{p}\right)F(p) = \frac{(p-2)^2}{p}F(p), \tag{34}$$

因此

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2}{p^3(p-2)^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(p-2)}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(p-2)^2} - \frac{1}{4(p-2)} + \frac{1}{4p} - \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right] \\ &= \frac{3}{8p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3} - \frac{3}{8(p-2)} + \frac{1}{4(p-2)^2}, \end{aligned} \tag{35}$$

因此结合位移定理，反变换得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{3}{8} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} - \frac{3}{8}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{2t} \\ &= \frac{1}{8}\left[(2t-3)\mathrm{e}^{2t} + 2t^2 + 4t + 3\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

注 Laplace 变换放综合题有时计算非常非常麻烦，我那一年的卷子 Laplace 变换放在了压轴题，两个变换算了半个小时还错了一个. 所以考试中在大题碰到后一定要仔细掂量，算到一半发现计算量不对的时候赶紧润，别上头了.

2. 设 $f(z) = (z-a)^n g(z) = h(z)/(z-b)^m$，其中 $g(z), h(z)$ 分别在 a, b 附近解析且 $g(a) \neq 0, h(b) \neq 0$，因此

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{m}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{37}$$

可见 $g'(z)/g(z), h'(z)/h(z)$ 分别在 a, b 附近解析，则 a, b 均为 $f'(z)/f(z)$ 在 γ 所包围区域内的单极点，由留数定理，

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\sin z\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z, a\right] + 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\sin z, b\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}(n\sin a - m\sin b). \end{aligned} \tag{38}$$

3. 由于 z 平面上两圆周 $|z-1| = 1, |z| = 2$ 相切于 $z = 2$，因此作分式线性变换

$$\varphi_1(z) = \frac{z+2}{z-2}. \tag{39}$$

对于外圆周 $|z|=2$，反解 z 得

$$z=2\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1} \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1}\right|=\frac{1}{2}|z|=1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Re}(\varphi_1)=0, \tag{40}$$

即外圆周变为虚轴. 类似地，

$$z-1=\frac{\varphi_1+3}{\varphi_1-1} \quad\Longrightarrow\quad |\varphi_1+3|=|\varphi_1-1| \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Re}(\varphi_1)=-1, \tag{41}$$

即内圆周变为 $\mathrm{Re}(\varphi_1)$，原区域变为两直线所围区域，即 $-1<\mathrm{Re}(\varphi_1)<0$. 再作变换

$$\varphi_2=\varphi_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}, \tag{42}$$

将该条形域变为条形域 $0<\mathrm{Im}(\varphi_2)<1$，此时作变换

$$\varphi_3=\mathrm{e}^{\pi\varphi_2} \tag{43}$$

可将该条形域化为角域 $0<\arg\varphi_3<\pi$，即 $\mathrm{Im}(\varphi_3)>0$.
注意到 $z=-1$ 对应 $\varphi_1=-1/3,\varphi_2=\mathrm{i}/3,\varphi_3=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$，因此最后的分式线性变换 $w(\varphi_3)$ 由题意需满足 $w(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3})=0$，从而 $w(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3})=\infty$，因此分式线性变换可写为

$$w=\frac{\varphi_3-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}}{\varphi_3-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}}. \tag{44}$$

综合以上变换，总变换可写为

$$\begin{aligned} w=f(z)&=\frac{\varphi_3-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}}{\varphi_3-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi\varphi_2}-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}}{\mathrm{e}^{\pi\varphi_2}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\varphi_1}-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}}{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\varphi_1}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}}=\frac{\exp\left(-\pi\mathrm{i}\dfrac{z+2}{z-2}\right)-\exp\left(\dfrac{\pi\mathrm{i}}{3}\right)}{\exp\left(-\pi\mathrm{i}\dfrac{z+2}{z-2}\right)-\exp\left(-\dfrac{\pi\mathrm{i}}{3}\right)}, \end{aligned} \tag{45}$$

示意图略.

注 也是一类典型区域——相切的内外圆间的区域，具体处理方法就参考这道题吧，虽然变换未必是最简单的，但至少可以像套公式一样不太需要动脑子.

4. 在 $|z|=1$ 上，考虑解析函数 $f(z)f(h(z))$ 或 $f(z)\overline{f(h(z))}$，希望 $\arg z,\arg h(z)$ 分别在 $[0,\pi)$ 和 $[\pi,2\pi)$ 两个区间内取值，且 $h(0)=0$. 这样两个函数的模在对应区间上的最大值分别为 2 和 3，乘积恰好为待证结论中 $|f(0)|^2$ 的上限. 有两种考虑：$\arg z\to-\arg z$ 和 $\arg z\to\pi+\arg z$. 前者可构造 $h(z)=\bar{z}$，对应解析函数为 $f(z)\overline{f(\bar{z})}$. 但后续证明较繁琐，请同学们自行尝试. 后者可构造 $h(z)=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-z$，对应解析函数为 $g(z)=f(z)f(-z)$. 显然 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，由最大模原理，

$$|f(0)|^2=|g(0)|\leqslant\ |g(z)|\Big|_{|z|=1}=\ |f(z)||f(-z)|\Big|_{|z|=1}\leqslant 2\times 3=6, \tag{46}$$

即 $|f(0)|\leqslant\sqrt{6}$，上式第二个等号成立当且仅当存在模为 1 的 z_0，使得 $f(z_0)=2,f(-z_0)=3$ 或 $f(z_0)=3,f(-z_0)=2$.