复变函数 2020-2021 期末试题解答

邓嘉驹

更新：December 12, 2023

一、填空题

1. 方程的全部根为 $z=\operatorname{Ln}(2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4})=\ln 2+\mathrm{i}(2k\pi+\pi/4)\ (k\in\mathbb{Z})$.
2. 由于 $f(z)$ 解析，其虚部为调和函数，即

$$\Delta_2(ax^2y-y^3-1)=2ay-6y\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad a=3. \tag{1}$$

3. 由题意，

$$\Delta_2 f(x,y)=6ax+2by+2cx+6dy\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} c=-3a, \\ b=-3d. \end{cases} \tag{2}$$

4. 由 Newton-Leibniz 公式，

$$\int_0^{\pi+2t}\left(\mathrm{e}^{-z}-\cos\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z=\left.-\mathrm{e}^{-z}-2\sin\frac{z}{2}\right|_0^{\pi+2t}=1-\mathrm{e}^{-(\pi+2t)}-2\cos t. \tag{3}$$

5. 显然 $z=1$ 为其本性奇点，$\mathrm{e}^{2z}-1$ 的全部零点为 $k_1\pi\mathrm{i}\ (k_1\in\mathbb{Z})$，$\sin z$ 的全部零点为 $k_2\pi\ (k_2\in\mathbb{Z})$，这两组零点均为 1 阶零点. 利用 $\mathrm{e}^{2z}-1\sim 2z,\sin z\sim z\ (z\to 0)$ 可知，$z=0$ 为其可去奇点. 其余奇点 $k_1\pi\mathrm{i}\ (k_1\in\mathbb{Z}且k_1\neq 0)$ 与 $k_2\pi\ (k_2\in\mathbb{Z}且k_2\neq 0)$ 均为单极点.

   注 仅在填空题中用等价无穷小较稳妥，解答题中利用极限证明，具体见计算题 4.

6. 由题意，

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\frac{1}{(z-1)^{2021}}\right),1\right]\\ =&\frac{1}{2020!}\frac{\mathrm{d}^{2020}}{\mathrm{d}z^{2020}}\left[\frac{(z-1)^{2020}+(z-1)^{2019}+\cdots+1}{z}\right]\Bigg|_{z=1}\\ =&\frac{1}{2020!}\frac{2020!+0}{1}=1.\end{aligned} \tag{4}$$

   将 $z^2\sin[1/(z-\mathrm{i})]$ 在 $z=\mathrm{i}$ 附近作 Laurent 展开：

$$z^2\sin\frac{1}{z-\mathrm{i}}=[(z-\mathrm{i})^2+2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})-1]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{2n+1}}, \tag{5}$$

由于 sin 展开式中仅含奇数次项，$1/(z-\mathrm{i})$ 的系数即该函数在 i 处的留数

$$\operatorname{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z-\mathrm{i}},\mathrm{i}\right]=-1+1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{7}{6}. \tag{6}$$

注 2021-2022 年期末试题也有类似的题，同学们可对照归纳出这类题的通用解法.

7. (a). 由本函数的微分法，

$$L[f''(t)]=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)=p^2F(p)+p+2, \tag{7}$$

因此对微分方程两端作 Laplace 变换得

$$F(p)=\frac{1}{p^2-1}\left(\frac{4}{p^2+1}-2+\frac{5p}{p^2+4}-p\right)=-\frac{2}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+4}. \tag{8}$$

(b). 由位移定理，

$$L^{-1}\left(\frac{3p+7}{p^2+2p+2}\right)=L^{-1}\left[\frac{3(p+1)+4}{(p+1)^2+1}\right]=\mathrm{e}^{-t}(3\cos t+4\sin t). \tag{9}$$

8. 在 $|z|=3$ 上，

$$\left|13z^2+15\right|\leqslant 13|z|^2+15=132<|z|^5=243, \tag{10}$$

故原方程在 $|z|<3$ 内有 5 个零点. 在 $|z|=2$ 上，

$$\left|z^5+15\right|\leqslant|z|^5+15=47<\left|13z^2\right|=52, \tag{11}$$

故原方程在 $|z|<2$ 内有 2 个零点，且在 $|z|=2$ 上无零点[1]. 在 $|z|=1$ 上，

$$\left|z^5+13z^2\right|\leqslant|z|^5+13|z|^2=14<|15|=15, \tag{12}$$

故原方程在 $|z|<1$ 内无零点，且在 $|z|=1$ 上无零点. 综上，原方程在 $1<|z|<2$ 内有 2 个零点，在 $2<|z|<3$ 内有 3 个零点.

注 使用 Rouché 定理时，原则上取 $f(z)$ 使其仅含一项时会使计算稍简便一些.

二、计算题

1. 函数的全部奇点满足 $\mathrm{e}^{z_n}+1=0$，即 $z_n=(2n+1)\pi\mathrm{i}\ (n\in\mathbb{Z})$. 由于在 $z=0$ 附近展开，故收敛半径 $R=\min\limits_n\{|z_n-0|\}=\pi$. 设 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近的 Taylor 展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则

$$\begin{aligned}z=(\mathrm{e}^z+1)f(z)&=\left(1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m!}z^{m+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\\&\xlongequal{k=m+n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{(k-n)!}\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{(k-n)!}+2a_k\right]z^k,\end{aligned} \tag{13}$$

[1]代入 $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，分别取实部和虚部放缩可验证

对比系数可知

$$2a_0 = 0, \tag{14}$$

$$a_0 + 2a_1 = 1, \tag{15}$$

$$\frac{a_0}{2!} + a_1 + 2a_2 = 0, \tag{16}$$

$$\frac{a_0}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2 + 2a_3 = 0, \tag{17}$$

$$\frac{a_0}{4!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_2}{2!} + a_3 + 2a_4 = 0, \tag{18}$$

从中解得 $a_0 = 0, a_1 = 1/2, a_2 = -1/4, a_3 = 0, a_4 = 1/48$，即

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z + 1} = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{48} + \cdots, \quad |z| < \pi. \tag{19}$$

注 这类将易展开函数作商展开的问题的典型特征是考题仅要求计算有限项，基本上看到这种暗示就用设幂级数后对比系数的方法. 以及这里为了书写规范用的是展开形式的通式，实际考试中为了计算方便建议写成形如 $\mathrm{e}^z = 1 + z + z^2/2! + \cdots$ 这种有限项 + 省略的形式.

2. 先变形再对正弦函数展开：

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin\left(\pi \frac{z+1}{z}\right) = z^2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{z}\right) = -z^2 \sin\frac{\pi}{z} \\ &= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1} = -\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} \frac{\pi^{2n+1}}{z^{2n-1}} \\ &= -\pi z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{1}{z^{2n+1}}, \quad 0 < |z| < \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

3. 记 $f(z) = \sin(z-1)/[z(z-1)\sin z]$. 由于 $\lim\limits_{z\to 1} \sin(z-1)/(z-1) = 1$，1 为 $f(z)$ 的可去奇点，且 0 为 $f(z)$ 的二 2 阶极点，由留数定理，

$$\int_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z), 0] = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z\sin(z-1)}{(z-1)\sin z}\right]\Big|_{z=0}. \tag{21}$$

记 $g(z) = \sin z/z$，则

$$g'(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{z\to 0} g'(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2}\left(-\frac{z^3}{3} + \cdots\right) = 0, \tag{22}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{g(z-1)}{g(z)}\right]\Big|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{g'(-1)g(0) - g(-1)g'(0)}{[g(0)]^2} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{(\sin 1 - \cos 1)\cdot 1 - 0}{1^2} = 2\sqrt{2}\pi\mathrm{i}\sin\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

4. 记 $f(z) = z(1-\cos 2z)\sin 3z/(1-\mathrm{e}^{3z})^5$，则 $f(z)$ 的奇点为 $z_k = 2k\pi\mathrm{i}/3$ $(k \in \mathbb{Z})$. 在 $|z| < 1$ 内，有且仅有 $z_0 = 0$ 这一零点. 又因为

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{z^2} = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2, \quad \lim_{z\to 0} \frac{\sin 3z}{z} = 3, \quad \lim_{z\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{3z}}{z} = -3, \tag{24}$$

那么

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{z^5}{(1-\mathrm{e}^{3z})^5}\frac{1-\cos 2z}{z^2}\frac{\sin 3z}{z}, \tag{25}$$

$z_0=0$ 为 $f(z)$ 的单极点，由留数定理，

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),0] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{(-3)^5}\cdot 2\cdot 3 = -\frac{4\pi\mathrm{i}}{81}. \tag{26}$$

5. 记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$，则

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{27}$$

因此取正向曲线 $C:|z|=1$，实积分改写成：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\int_C\frac{4z^2}{(bz^2+2az+b)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\int_C\frac{z\,\mathrm{d}z}{[z^2+(2a/b)z+1]^2}. \tag{28}$$

由于 $0<b<a$，$f(z)=1/[z^2+(2a/b)z+1]^2$ 的奇点满足

$$z^2+\frac{2a}{b}z+1=0\quad\Longrightarrow\quad z_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \tag{29}$$

并且

$$|z_1|=\left|\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}<\frac{b}{a}<1, \tag{30}$$

$$|z_2|=\left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}>\frac{b}{a}>1, \tag{31}$$

因此 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内仅有 2 阶极点 z_1，从而

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}&=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)\Bigg|_{z=z_1}\\&=\frac{8\pi}{b^2}\cdot\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3}=\frac{8\pi}{b^2}\cdot\frac{ab^2}{4(a^2-b^2)^{3/2}}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{32}$$

6. 记 $R(z)=(z^2-1)/[(z^2+1)z]$，则 $R(z)$ 在上半平面内仅有单极点 i、在实轴上仅有单极点 0，因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\,\mathrm{d}x&=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z},\mathrm{i}\right]+\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z},0\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-2\mathrm{e}^{-2}}{-2}+\pi\mathrm{i}\cdot(-1)=\pi\mathrm{i}(2\mathrm{e}^{-2}-1).\end{aligned} \tag{33}$$

由于被积函数为偶函数，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\,\mathrm{d}x\right)=\pi\left(\mathrm{e}^{-2}-\frac{1}{2}\right). \tag{34}$$

三、综合题

1. 由于 $f(z)$ 在闭路 C 围成的区域 D 内解析，由最大模原理，$|f(z)| \leqslant |f(z)|\big|_{z\in C} = M$. 另一方面，令 $g(z) = 1/f(z)$，由于 $f(z)$ 在 D 内无零点，且对于 $\forall z \in D$，极限

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{f(z+\Delta z)}-\frac{1}{f(z)}\right]\\ &= -\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\frac{1}{f(z)f(z+\Delta z)}\\ &= -\frac{f'(z)}{[f(z)]^2}\end{aligned} \tag{35}$$

存在，因此 $g(z)$ 在 D 内也解析，由最大模原理，$|g(z)| \leqslant |g(z)|\big|_{z\in C} = 1/M$，即 $|f(z)| \geqslant M$. 综上分析，$|f(z)| \equiv M$，从而对 $\forall z \in C + D$，均 $\exists \alpha(z) \in \mathbb{R}$，使得 $f(z) = M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

2. 在 $|z| < R$ 内，$f(z) = (z+a)/[(z-a)z]$ 有单极点 $a, 0$，由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), a] + \mathrm{Res}[f(z), 0] = 2 + (-1) = 1. \tag{36}$$

在 $|z| = R$ 上，可令 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$，因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a}\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\bar{a})}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-|a|^2)+R(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta = 1.\end{aligned} \tag{37}$$

由于 $a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 与 $\bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 互为共轭复数，故两者之差为纯虚数. 对比上述等式实部可证

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta = 1. \tag{38}$$

3. 先考虑边界：$\mathrm{Im}(z) = 0$. 在边界上 $z = x \in \mathbb{R}$，代入得

$$w = \frac{3x-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}x-1} \quad\Longrightarrow\quad |w| = \frac{|3x-\mathrm{i}|}{|3\mathrm{i}x-1|} = \sqrt{\frac{9x^2+1}{9x^2+1}} = 1, \tag{39}$$

因此 z 平面上的边界变为 w 平面上的单位圆周. 再考虑区域 $\mathrm{Im}(z) < 0$ 内一特殊点 $z_0 = -\mathrm{i}$ 的变换：

$$w_0 = w(-\mathrm{i}) = \frac{-4\mathrm{i}}{2} = -2\mathrm{i} \quad\Longrightarrow\quad |w_0| = 2 > 1, \tag{40}$$

因此 z 平面上的区域 $\mathrm{Im}(z) < 0$ 变为 w 平面上的单位圆外域 $|w| > 1$.

4. (a). 由于 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，故 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 级数一致收敛于 $f(z)$. 记该级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 由共轭运算的线性性与保持模不变的性质，对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$，使得当 $n > N$ 时，满足

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\bar{z}^k - \overline{f(z)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}a_k z^k - f(z)\right| < \varepsilon, \tag{41}$$

故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n\bar{z}^n$ 也一致收敛于 $\overline{f(z)}$，从而该积分和无穷求和可交换. 而在 $|z|=r$ 上，$r^2=z\bar{z}$，因此

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_{|z|=r}\frac{\bar{z}^m}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^{2m}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z^{m+n+1}}. \tag{42}$$

由于 $n\geqslant 1$，故 $m+n+1\geqslant 2>1$，因此 $\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z^{m+n+2}}\equiv 0$，证得

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0. \tag{43}$$

(b). 利用上一问的结论和 Cauchy 积分公式，当 $n\geqslant 1$ 时，将 Taylor 级数的系数改写为：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned} \tag{44}$$

(c). 沿用第 (1) 问的结果，$\overline{f(0)}=\bar{a}_0$，且

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n r^{2n}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z^n(z-z_0)}. \tag{45}$$

当 $n\geqslant 1$ 时，由 Cauchy 积分公式，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z^n(z-z_0)}=\frac{1}{z_0^n}+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left.\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(z-z_0)^n}\right|_{z=0}=0, \tag{46}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\frac{\bar{a}_0}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=\bar{a}_0=\overline{f(0)}. \tag{47}$$