第一次习题课讲义

邓嘉驹

更新：November 13, 2023

目录

1 知识点回顾 **2**

1.1 复数和平面点集 2

1.2 复变数函数 2

1.3 解析函数的积分表示 3

1.4 调和函数 4

1.5 解析函数的级数展开 4

1.5.1 基本性质 5

1.5.2 幂级数 5

1.5.3 解析函数的 Taylor 展开 6

1.5.4 Laurent 级数 6

1.5.5 解析函数的孤立奇点 7

2 作业题讲解 **8**

3 其他习题补充 **10**

1 知识点回顾

1.1 复数和平面点集

1. 复数的四则运算.
2. 共轭复数的性质.
3. 复数的几何表示.

   注 将复数表示成指数式时应注意两点：

   (a). 模长必须为正. 如 $-1-2\mathrm{i}$ 不能写成 $-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan 2}$.

   (b). 注意通过复数处于第几象限判断辐角主值的取值范围，这是因为反正切函数 $\arctan x$ 默认值域为 $(-\pi/2,\pi/2)$. 因此当 z 位于第一、四象限时 $\arg z=\arctan(y/x)$，当 z 位于第二、四象限时 $\arg z=\pi+\arctan(y/x)$. 如 $z=-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 的辐角主值为 $\arg z=\pi+\arctan\left(-\sqrt{2}\right)=\pi-\arctan\left(\sqrt{2}\right)$.

4. 复数的乘方和开方.

   注 只有当复积分化为实积分时才考虑用三角式，其他时候都采用更简洁的指数式或更直观的一般式.

5. 复数列极限的等价定义以及无穷远点.
6. 区域和闭域、简单曲线、单连通域和多连通域.

1.2 复变数函数

1. 函数的极限与连续性：设 $w=f(z),z\in D$，$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得当 $D_0:0<|z-z_0|\leqslant\delta\subset D$ 时，$|f(z)-w_0|<\varepsilon$. 若 $w_0=f(z_0)$，则 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
2. 可微和解析：$f(z)$ 在 z 的邻域内有定义且极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]/\Delta z$ 存在，则 $f(z)$ 在 z 点可微. 若 $f(z)$ 在 D 内可微，则 $f(z)$ 在 D 内解析；若 $f(z)$ 在 z 的某个邻域内可微，则 $f(z)$ 在 z 点解析. 奇点即使 $f(z)$ 不解析的点.
3. 可微的充要条件：记 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\ (x,y,\in\mathbb{R})$，则 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 可微的充要条件如下.

   (a). u,v 在点 (x_0,y_0) 可微.

   (b). u,v 满足 *Cauchy-Riemann* 方程：$u_x=v_y,u_y=-v_x$.

   注 对于区域 D_1,D_2 的边界 C，若 $f(z)$ 在 D_1,D_2 至少一个区域内不解析，则 $f(z)$ 在 C 上不解析.

4. 初等函数.

   (a). 幂函数：$w=z^n$，通常取角域 $D:-\pi/n<\arg z<\pi/n$.

   (b). 根式函数：$w=\sqrt[n]{z}$，支点为 $z=0$ 和 ∞，通常取负实轴为其支割线.

   注 若函数 $f(z)=[P_n(z)]^{q/p}$，其中 $P_n(z)$ 为 n 次多项式，$p,q\in\mathbb{N}^+$ 且 $(p,q)=1$，则其支点为令 $f(z)=0$ 或 ∞ 的点.

(c). 指数函数：$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$.

I. $|w|=\mathrm{e}^x, \arg w=y$，因此 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x\neq 0$，即 $\mathrm{e}^z\neq 0$.

II. $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在.

III. 周期为 $2\pi\mathrm{i}$.

(d). 对数函数：$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\ (k\in\mathbb{Z})$，其主值为 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$.

注 $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$ 可满足，但 $\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln} z\neq 2\operatorname{Ln} z$，这源于 $\operatorname{Arg} z$ 的多值性.

(e). 三角函数：余弦 $\cos z=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2$，正弦 $\sin z=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2\mathrm{i}$，正切 $\tan z=\sin z/\cos z$.

I. 周期、零点、导数、平方和为 1 的结论与实函数情形一致.

II. $|\sin z|, |\cos z|$ 无界.

(f). 双曲函数：双曲余弦 $\cosh z=(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})/2, \sinh z=(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})/2$，双曲正切 $\tanh z=\sinh z/\cosh z$.

I. $\cos(\mathrm{i}z)=\cosh z, \sin(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\sinh z$，由此可求其零点、导数，周期为 $2\pi\mathrm{i}$.

II. $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$，两角和差的正余弦公式与三角函数的极其相似，请自行查阅.

(g). 一般幂函数：$z^\alpha=\exp(\alpha\operatorname{Ln} z)=\exp[\alpha(\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg} z)]$，其中 $\alpha\in\mathbb{C}, z\neq 0$. 若 α 为无理数或一般复数，则该函数无穷多值.

(h). 反三角函数：利用三角函数的定义反解关于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 的一元二次方程.

1.3 解析函数的积分表示

1. 常用积分形式：$\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$，如 C 取 $|z|=r$ 时常令 $z(\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. 积分性质：

(a). $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

(b). $\displaystyle\int_{|z-a|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$

(c). 长大不等式：$\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|$.

(d). $\rho>0$ 充分小时，记圆弧 $C_\rho: z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则

$$\lim_{\rho\to 0^+}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)k. \tag{1}$$

注 此结论的证明过程很重要.

3. Cauchy 积分定理：对于复闭路 C 围成的单连通域 D，$f(z)$ 在 $C+D$ 上解析，则 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

若 D 为多连通域，记 C 内部“空洞”的正向边界为 $C_1,\cdots,C_n$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^n\int_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{2}$$

由此可证，对任意包含 a 的复闭路 C，均有 $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi\mathrm{i}$.

注 此积分的证明思路应熟记.

4. Newton-Leibniz 公式[1]：$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} F'(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$.
5. Cauchy 积分公式:对复闭路 C，$f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$. 特别地，$f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$.
6. 解析函数的性质.
   (a). 平均值公式：$f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leqslant R$ 内解析，则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int_{|z-a|=R} |f(z)|\,\mathrm{d}s$.
   (b). 最大模原理：$f(z)$ 在 D 内解析且非常数，在 D 的边界 C 上连续，则 $\max\limits_{C+D} |f(z)| = \max\limits_{C} |f(z)|$.

   注 若 $f(z)$ 在 D 内无零点，即 $|f(z)|$ 严格正，则 $\min\limits_{C+D} |f(z)| = \min\limits_{C} |f(z)|$.

   (c). Cauchy 不等式：$f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leqslant R$ 内解析，闭路 C 为 D 的边界，则 $\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant n! \max\limits_{C} |f(z)|/R^n$.
   (d). Liouville 定理：有界的整函数[2]为常数.
   (e). 代数学基本定理：任何复系数多项式必有零点.

1.4 调和函数

(a). 共轭调和函数：满足 Cauchy-Riemann 方程的一对调和函数 $u(x,y), v(x,y)$，满足 $\Delta u = \Delta v = 0, \nabla u \cdot \nabla v = 0$.
(b). 若已知调和函数 u 或 v，则

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y\,, \tag{3}$$

$$\text{or } u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y\,. \tag{4}$$

计算路径积分时，通常取折线 $(x_0,y_0) \to (x,y_0) \to (x,y)$.

注 实际求解这类题时，更便捷的做法是计算 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$ 或 $f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x$，将其表示成 $z = x + \mathrm{i}y$ 的形式（令 $y = 0, x = z$）后利用 Newton-Leibniz 公式求解.

(c). 调和函数的性质.
   I. 平均值原理：$u(z)$ 在闭圆 $|z - z_0| \leqslant R$ 内调和，则 $u(z) = \dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int_{|z-z_0|=R} u(z)\,\mathrm{d}s$.
   II. 极值原理：$u(z)$ 在 D 内调和且非常数，在 D 的边界 C 上连续，则 $u(z)$ 的最值均在 C 上取到.

1.5 解析函数的级数展开

[1]适用于能直接看出原函数且积分与路径无关（即被积函数解析）的积分，例如通过调和函数 u 或 v 构造复变函数 $f(z)$ 的题，当然一般题目不要求通常不使用（也通常用不上）
[2]在复平面上解析的函数

1.5.1 基本性质

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 均收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和 $S_n(z)=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ 存在极限.
2. Cauchy 收敛准则（一般用不到）$\Rightarrow$ 收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 均绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛.
4. Weierstrass 判别法[3]：若对 $\forall z \in E$ 均有 $|f_n(z)| \leqslant M_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上绝对一致收敛.
5. 一致收敛级数的性质.
   (a). 连续：$\lim\limits_{z\to z_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{z\to z_0} f_n(z) \xlongequal{f_n(z)\text{连续}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.
   (b). 可积：$\int_{z_1}^{z_2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.
   (c). 可导：若 $f_n(z)$ 解析，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$.

1.5.2 幂级数

1. 定义：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$，其中 $a_n = f^{(n)}(a)/n!$.
2. 收敛半径[4]：$R = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}$. 当 $|z-a|<R$ 时级数收敛，当 $|z-a|>R$ 时级数发散，当 $|z-a|=R$ 时情况不定.

注 计算幂级数的和函数时，最常见的为形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 的形式. 可通过积分（前者）或求导（后者）的方式将各项凑成 z^n（或 $z^{n\pm1}$ 等）的形式，求和后再进行逆运算，如

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n &= z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\right) = z^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)\\ &= z^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}, \quad |z|<1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} &= \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\int_0^{\zeta}\sum_{n=1}^{\infty} u^n\,\mathrm{d}u\\ &= -\int_0^z [\ln(1-\zeta)+\zeta]\,\mathrm{d}\zeta\\ &= (1-z)\ln(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad |z|<1. \end{aligned} \tag{6}$$

[3]一致收敛的定义和 Cauchy 一致收敛准则基本用不到

[4]这来源于比值审敛法的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(z-a)^{n+1}}{a_n(z-a)^n}\right| = |z-a|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xlongequal{\Delta} \dfrac{|z-a|}{R} < 1$

1.5.3 解析函数的 Taylor 展开

1. 收敛半径：若将函数 $f(z)$ 在 a 点展开，则以 a 为中心作圆并不断扩大，直至圆的边界首次包含 $f(z)$ 的奇点. 即若以 $a_1,\cdots,a_n$ 表示 $f(z)$ 的全体奇点，则 $R=\min\limits_i\{|a-a_i|\}$. $f(z)$ 可在 $|z-a|<R$ 内唯一展开.

   注 千万别用幂级数中 R 的定义硬怼. 以及书写展开式时别忘了带上收敛域.

2. $f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 能在 D 内任一点将 $f(z)$ 作 Taylor 展开.
3. 常用 Taylor 展开：

   (a). $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots,\ z\in\mathbb{C}.$

   (b). $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots,\ z\in\mathbb{C}.$

   $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots,\ z\in\mathbb{C}.$

   (c). $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots,\ |z|<1.$

   (d). $\mathrm{Ln}_k(1+z)=2k\pi\mathrm{i}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n\ (k\in\mathbb{Z}),\ |z|<1.$

   注 将函数作 Taylor 展开时有两类常见形式.

   (a). 对于形如 $z^m/(z-a)^n$ 的函数，在 $z=0$ 处展开时可先将有理分式改写成

   $$\frac{1}{(z-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z-a)^{n-1}}\right]=\cdots=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{z-a}\right),\tag{7}$$

   利用一致收敛级数的可微性，将 $1/(z-a)$ 在 $|z|<|a|$ 内展开后求导，最后再乘上 z^m.

   (b). 对于容易展开的函数 $f(z),g(z)$ 构成的形如 $f(z)/g(z)$ 的复杂函数，求解其 Taylor 展开级数前有限项时，通常设

   $$\frac{f(z)}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\quad\Longrightarrow\quad f(z)=g(z)\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\tag{8}$$

   此时将 $f(z),g(z)$ 展开，对比系数解方程组，可得到 $a_0,a_1,\cdots$ 的值. 求解过程中可利用如 $f(z)/g(z)$ 的“奇偶性”[5]减少需要求解的系数数目.

4. z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点等价于：

   (a). $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0),f^{(m)}(z_0)\neq0.$

   (b). 在 z_0 附近，$f(z)=(z-z_0)^mg(z_0)$，其中 $g(z)$ 在 z_0 附近解析且 $g(z_0)\neq0.$

1.5.4 Laurent 级数

1. 定义：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$

   其中 $a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，$C$ 为解析域内一闭路.

[5]即 $f(-z)/g(-z)=\pm f(z)/g(z)$

2. 收敛域：$r<|z-a|<R$，其中 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_{-(n+1)}/a_{-n}\right|, R=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$.
3. 通常计算 Laurent 级数采用的是变量代换的方法，即令 $\xi_1=(z-a_1)/b_1$ 或 $\xi_2=b_2/(z-a_2)$，使得 $|\xi_1|,|\xi_2|<1$. 那么对 ξ_1,ξ_2 展开后，Laurent 级数的主要部分与正则部分均收敛.

1.5.5 解析函数的孤立奇点

1. 定义：函数在点 a 的某个邻域内除 a 点均解析，则 a 为孤立奇点.

   注 依定义，∞ 不是 $\tan z$ 的孤立奇点. 这是因为 $\tan z$ 有奇点 $a_n=(n+1/2)\pi$，在 ∞ 的任意邻域 $D:|z|>R$ 内，均 $\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，均有 $|a_n|\in D$.

2. 分类.

   (a). 可去奇点：$f(z)$ 在 a 的去心邻域内有界，或 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有限.

   注 判断可去奇点时，在填空题中可借助“等价无穷小”的概念快速得到结论，如 $z=0$ 是 $(\mathrm{e}^z-1)/z$ 的可去奇点；但在证明题中不能直接用，应当借助 Taylor 展开与可展开 $\Leftrightarrow$ 解析的结论证明. 对于分母并非 $(z-a)^n$ 形式的函数，如 $(\mathrm{e}^z-1)/\sin z$，可分别证明 $(\mathrm{e}^z-1)/z$ 和 $\sin z/z$ 解析在 $z=0$ 解析，再证明

   $$\frac{\mathrm{e}^z-1}{\sin z}=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}\frac{z}{\sin z} \tag{9}$$

   在 $z=0$ 处解析.

   (b). m 阶极点：$f(z)=\varphi(z)/(z-a)^m$，其中[6]$\varphi(z)$ 在 a 附近解析且 $\varphi(a)\neq 0$；或[7]a 是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点.

   (c). 本性奇点：Laurent 级数展开项的主要部分有无穷多项，或 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在.

   注 I. 对于函数 $\mathrm{e}^{1/(z-a)}$，a 必定为其本性奇点.

   II. 利用函数 $f(z)$ 在本性奇点 z_0 极限不存在的性质，可证 z_0 也是 $1/f(z)$ 的本性奇点.

3. 对于 ∞ 点，作代换 $\zeta=1/z$，类似地可研究 $z=\infty$ 即 $\zeta=0$ 处的奇点种类.

[6]多用于证明题
[7]多用于判断极点阶数

2 作业题讲解

1. *Ch2 T1 (5)* 函数 $w=1/z$ 把 z 平面上的 $(x-1)^2+y^2=5$ 变为 w 平面上的什么曲线？

   注 习惯上我们会设 $w=u+\mathrm{i}v$ $(u,v\in\mathbb{R})$，然后利用 $1/z=(x-\mathrm{i}y)/(x^2+y^2)$，对比实虚部得到 $u(x,y),v(x,y)$，再代入 x,y 满足的条件. 但有时候 x,y 满足的方程并不那么容易代入，这时我们会反解 $x=u/(u^2+v^2),y=-v/(u^2+v^2)$ 再将解代入——实际上这种方法更普适.

2. *Ch2 T9 (2)* 设 $H(x,y)$ 在 z 平面的区域 D 内有直到二阶连续的偏导数，$\zeta=f(z)=\xi(x,y)+\mathrm{i}\eta(x,y)$ 是 D 内的单叶函数. 求证

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\left|f'(z)\right|^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}\right). \tag{10}$$

   解 将多元函数偏微分的链式法则写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\partial_\xi\\ \partial_\eta\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}\xi_x & \eta_x\\ \xi_y & \eta_y\end{pmatrix}, \tag{11}$$

   由 C-R 方程，$\xi_x=\eta_y,\xi_y=-\eta_x$，且 $f'(z)=\xi_x-\mathrm{i}\xi_y$，因此

$$M^TM=\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y\\ -\xi_y & \xi_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_x & -\xi_y\\ \xi_y & \xi_x\end{pmatrix}=(\xi_x^2+\xi_y^2)I, \tag{12}$$

   其中 I 为单位矩阵，从而

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\begin{pmatrix}\partial_x & \partial_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\partial_\xi & \partial_\eta\end{pmatrix}M^TM\begin{pmatrix}\partial_\xi\\ \partial_\eta\end{pmatrix}\\ &=(\xi_x^2+\xi_y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)=\left|f'(z)\right|^2\Delta_{\xi\eta},\end{aligned} \tag{13}$$

   即 $\Delta_{xy}H=|f'(z)|^2\Delta_{\xi\eta}H$，结论得证.

   注 感谢马梓州同学的解法. 不过也不用太担心考试碰到类似的题，毕竟这类题基本在淑芬 B2 就考得差不多了.

3. *Ch2 T16 (2)* 判断下列极限是否存在：$\lim\limits_{z\to0}z\sin\dfrac{1}{z}$.

   注 这类求 $z\to\infty$ 时函数极限的题，若函数中含 e^z 项（包括三角函数、双曲三角函数），则基本朝着发散的方向去证明. 如对 e^z 取 $z=\mathrm{i}y$，对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 取 $z=x$，再利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 的震荡发散性证得结论.

4. *Ch2 T23* 求下列值：Arcsin i, Arccos 2.

   注 这题和上一题一样，也只是一个小知识点. 反三角函数直接代入的公式并不常用，背起来会有些麻烦. 再者从实用的角度来看也没必要为了可能的几分特意准备. 关键在于明白反三角的计算思路，即利用三角函数的定义反解关于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 的一元二次方程，得到两根.

5. *Ch3 T5* 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z+2}$，并由此证明

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=0. \tag{14}$$

注 利用这类复积分证明实积分结论时，若积分区间长度为 π，用对称性时有如下两种方式：(1) 取积分区间为 $[0,2\pi]$，利用 $\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$；(2) 取积分区间为 $[-\pi,\pi]$，利用 $\cos\theta=\cos(-\theta)$. 两者不能混用.

6. *Ch3 T7* 设 $f(z)$ 在域 $D:|z|>R_0,0\leqslant\arg z\leqslant\alpha,0<\alpha\leqslant 2\pi$ 内连续，且存在极限

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=A. \tag{15}$$

设 C_R 是位于 D 内的圆弧 $|z|=R$，试证明

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}A\alpha. \tag{16}$$

注 这类题有很明显的特征：积分路径是圆（弧）形[8]，有已知函数极限（趋于 z_0 点或无穷），证明函数积分的极限. 其通常解题步骤是：

(a). 将极限形式改写成 $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=A$，再用极限的 ε-δ 语言将函数极限写成模的不等式. 如此处令 $g(z)=zf(z)$，则对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists R(\varepsilon)>0$，使得当 $|z|>R$ 时，满足 $|g(z)-A|<\varepsilon$.

(b). 将需证明的积分极限右侧值利用 $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=\mathrm{i}(\beta-\alpha)$ 改写成积分形式，其中 $C:|z|=R$ 且 $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$，$(z-z_0)$ 与用 $g(z)$ 表示的被积函数分母保持一致. 如此处被积函数为 $g(z)/z$，因此 $z_0=0$.

(c). 等式两端作差取模，利用长大不等式和极限的定义证明结论. 如此处作差后得到

$$\left|\int_{C_R}\frac{g(z)-A}{z}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{C_R}\frac{|g(z)-A|}{|z|}|\mathrm{d}z|<\int_0^{\alpha}\varepsilon\,\mathrm{d}\theta=\alpha\varepsilon, \tag{17}$$

其中第二个不等式处代入了 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

7. *Ch4 T2 (1)* 设 $f(z)$ 是解析函数，证明：$\ln|f(z)|$ 是调和函数 $(f(z)\neq 0)$.

注 证明实函数调和时，若能构造解析的复变函数使得该实函数为其实部或虚部，则避免了直接计算二阶偏导而使证明过程极大简化. 类似的题还有 Ch4 T5. 这里感谢几位同学提供的思路（可惜当时忘了记录下来），构造 $\ln f(z)$，使得 $\ln|f(z)|=\mathrm{Re}\ln f(z)$. 因为 $\ln f(z)$ 是关于 $f(z)$ 的初等函数，而 $f(z)$ 解析，故 $\ln f(z)$ 解析，结论得证.

8. *Ch4 T4 (3)* 求解析函数 $f(z)$，使其分别满足下列条件：虚部为 $-y/[(x+1)^2+y^2]$，且 $f(0)=2$.

注 概括一下这类用调和实函数构造解析函数的题的步骤：

(a). 证明实函数调和.

(b). 利用 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$ 或 $f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x$ 计算 $f'(z)$. 再令 $x=z,y=0$，将 $f'(z)$ 写成以 z 为变量的形式[9].

(c). 利用 Newton-Leibniz 公式计算 $\displaystyle f(z)=f(0)+\int_0^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

[8]圆弧形是为了保证第三步使用长大不等式后，$|\mathrm{d}z/z|$ 可简化为 $\mathrm{d}\theta$

[9]这一做法的依据是，令 $y=0$ 可得 $f(x)$，即得到函数 f 的形状，再替换变量得到 $f(z)$ 具体表达式

3 其他习题补充

1. *2019-2020 期末 T1 (4)* [10] 设 $f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2}+\mathrm{e}^{1/(z-\mathrm{i})}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：_____.

   解 显然 $z=0$ 和 $z=\mathrm{i}$ 分别是 $f(z)$ 的 3 阶极点和本性奇点. 由于 $\lim\limits_{z\to5}\dfrac{\sin(z-5)}{z-5}=1$，故 5 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

2. *2019-2020 期末 T1 (7)* 设函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cos z}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，那么幂级数的收敛半径 $R=$_____.

   解 $f(z)$ 的全部奇点满足 $\cos z_n=0$，即 $z_n=(n+1/2)\pi$. 由于 $f(z)$ 在 $z=0$ 处展开，因此 $R=\min\limits_n\{|z_n-0|\}=\pi/2$.

3. *2019-2020 期末 T1 (10)* 设 $u=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$，那么在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>0\}$ 解析并以 $u(x,y)$ 为它的实部的函数为 $f(z)=$_____.

   解 结合 C-R 方程，先给出 $f'(z)$ 的表达式：

   $$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{1}{z},\tag{18}$$

   其中 $z=x+\mathrm{i}y$. 由于 $\mathrm{Re}(z)>0$，故 $-\pi/2<\arg z<\pi/2$. 在右半平面内，任取 z_0，这里取 $z_0=1$. 由 Newton-Leibniz 公式，

   $$f(z)=f(1)+\int_1^z f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=f(1)+\ln z.\tag{19}$$

   其中已将 $\mathrm{Ln}\,z$ 中的 $2k\pi\mathrm{i}$ 项并入 $f(1)$. 利用 $\mathrm{Re}\,f(z)=u(x,y)$ 解得 $f(1)=\mathrm{i}C$ $(C\in\mathbb{R})$，即

   $$f(z)=\ln z+\mathrm{i}C,\quad \mathrm{Re}\,z>0, C\in\mathbb{R}.\tag{20}$$

4. *2019-2020 期末 T2 (1)* 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$ 的和函数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$.

   解 幂级数的收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2}{(n+1)^2}\right|=1$，在 $|z|<R$ 内该级数收敛. 记和函数 $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$，则

   $$\begin{aligned}S(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^n\right)=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right)\right]\\&=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{1-z}\right)\right]=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3},\quad |z|<1,\end{aligned}\tag{21}$$

   进而可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

[10] 这三年每年都考的题型

5. *2019-2020 期末 T2 (4)* 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4}\right|\mathrm{d}\theta$.

解 记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$，则 $\bar{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=1/z$，从而

$$\left|\frac{1}{(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4}\right|=\frac{1}{|(2-z)^4|}=\frac{1}{(2-z)^2(2-\bar{z})^2}=\frac{z^2}{(2-z)^2(2z-1)^2},\tag{22}$$

因此取正向闭曲线 $C:|z|=1$，代入 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，实积分转化为复平面上的环路积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4}\right|\mathrm{d}\theta&=\int_C\frac{z^2}{(2-z)^2(2z-1)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{4}\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(2-z)^2}\right)\right|_{z=1/2}\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{2+z}{(2-z)^3}\right|_{z=1/2}=\frac{10\pi}{27},\end{aligned}\tag{23}$$

其中已利用 Cauchy 积分公式，并注意到 C 所包围的区域内仅有奇点 $z=1/2$.

6. *2019-2020 期末 T3 (1)* 设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数，则 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数，请问：$g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数？给出你的答案，如果“是”，给出证明；“否”，举个反例.

解 是. 证明如下：设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ $(u,v\in\mathbb{R})$，那么 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}=u_1(x,y)+\mathrm{i}v_1(x,y)=u(x,-y)-\mathrm{i}v(x,-y)$. u,v 可微，显然 u_1,v_1 也可微，且

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad\frac{\partial v_1}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad\frac{\partial v_1}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{24}$$

代入 u,v 满足的 Cauchy-Riemann 方程，可证 u_1,v_1 满足 Cauchy-Riemann 方程，因此 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 解析

7. *2019-2020 期末 T3 (5)*（压轴）设 $P_n(z)=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}$，$A_n$ 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=+\infty.\tag{25}$$

解 对 $\forall M>0$，当 $|z|\leqslant M$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 一致收敛于 e^z. 则由 Cauchy 收敛准则，对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+$，使得当 $n>N$ 时，令 $p\to\infty$，满足

$$|\mathrm{e}^z-P_n(z)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|<\varepsilon.\tag{26}$$

确定 M 后，不妨取 $\varepsilon=\mathrm{e}^{-M}$，这样也确定了 $N(\varepsilon)$. 另一方面，由于 $|x|\leqslant|z|\leqslant M$，故 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^{-M}$，因此

$$|P_n(z)|=\left|\mathrm{e}^z-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|\geqslant|\mathrm{e}^z|-\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|>\mathrm{e}^{-M}-\varepsilon=0,\tag{27}$$

因此 $P_n(z)$ 在 $|z|\leqslant M$ 内无零点，即 $|A_n|>M$. 综上，对 $\forall M>0$，总 $\exists N(M)\in\mathbb{N}^+$，使得当 $n>N$ 时，总有 $|A_n|>M$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=+\infty$.

8. *2020-2021 期末 T2 (1)* 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{\mathrm{e}^z+1}$ 在 $z=0$ 处 Taylor 展开前 5 项（即展开到 z^4 为止），并且给出所得幂级数的收敛半径.

解 函数的全部奇点满足 $\mathrm{e}^{z_n}+1=0$，即 $z_n=(2n+1)\pi\mathrm{i}\ (n\in\mathbb{Z})$. 由于在 $z=0$ 附近展开，故收敛半径 $R=\max\limits_n\{|z_n-0|\}=\pi$. 设 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近的 Taylor 展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则

$$\begin{aligned}z=(\mathrm{e}^z+1)f(z)&=\left(1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m!}z^{m+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\\&\xlongequal{k=m+n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{(k-n)!}\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{(k-n)!}+2a_k\right]z^k,\end{aligned}\tag{28}$$

对比系数可知

$$2a_0=0,\tag{29}$$

$$a_0+2a_1=1,\tag{30}$$

$$\frac{a_0}{2!}+a_1+2a_2=0,\tag{31}$$

$$\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+a_2+2a_3=0,\tag{32}$$

$$\frac{a_0}{4!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{2!}+a_3+2a_4=0,\tag{33}$$

从中解得 $a_0=0,a_1=1/2,a_2=-1/4,a_3=0,a_4=1/48$，即

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z+1}=\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{48}+\cdots,\quad |z|<\pi.\tag{34}$$

9. *2020-2021 期末 T2 (2)* 将函数 $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<+\infty\}$ 内展开成 Laurent 级数.

解 先变形再对正弦函数展开：

$$\begin{aligned}f(z)=z^2\sin\left(\pi\frac{z+1}{z}\right)&=z^2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{z}\right)=-z^2\sin\frac{\pi}{z}\\&=-z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1}=-\pi z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{z^{2n-1}}\\&=-\pi z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+3}}{(2n+3)!}\frac{1}{z^{2n+1}},\quad 0<|z|<\infty.\end{aligned}\tag{35}$$

10. *2020-2021 期末 T2 (5)* 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}\ (0<b<a)$.

解 记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ (0\leqslant\theta<2\pi)$，则

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta\,,\tag{36}$$

因此取正向曲线 $C:|z|=1$，实积分改写成：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\int_C\frac{4z^2}{(bz^2+2az+b)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\int_C\frac{z\,\mathrm{d}z}{[z^2+(2a/b)z+1]^2}.\tag{37}$$

由于 $0<b<a$，$f(z)=1/[z^2+(2a/b)z+1]^2$ 的奇点满足

$$z^2+\frac{2a}{b}z+1=0 \quad\Longrightarrow\quad z_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \tag{38}$$

并且

$$|z_1|=\left|\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}<\frac{b}{a}<1, \tag{39}$$

$$|z_2|=\left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right|=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}>\frac{b}{a}>1, \tag{40}$$

因此 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内仅有 2 阶极点 z_1，从而

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}&=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{4\mathrm{i}}{b^2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)\Big|_{z=z_1}\\&=\frac{8\pi}{b^2}\cdot\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3}=\frac{8\pi}{b^2}\cdot\frac{ab^2}{4(a^2-b^2)^{3/2}}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{41}$$

11. *2020-2021 期末 T3 (1)* 设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在有界闭域 $C+D$ 上连续，这里 C 为 D 的边界. 证明：如果函数 $f(z)$ 没有零点，并且对于 $z\in C$ 有 $|f(z)|=M$（$M>0$ 为常数），那么存在实数 α 使得 $f(z)=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

解 由于 $f(z)$ 在闭路 C 围成的区域 D 内解析，由最大模原理，$|f(z)|\leqslant |f(z)|\big|_{z\in C}=M$. 另一方面，令 $g(z)=1/f(z)$，由于 $f(z)$ 在 D 内无零点，且对于 $\forall z\in D$，极限

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{f(z+\Delta z)}-\frac{1}{f(z)}\right]\\&=-\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\frac{1}{f(z)f(z+\Delta z)}\\&=-\frac{f'(z)}{[f(z)]^2}\end{aligned} \tag{42}$$

存在，因此 $g(z)$ 在 D 内也解析，由最大模原理，$|g(z)|\leqslant |g(z)|\big|_{z\in C}=1/M$，即 $|f(z)|\geqslant M$. 综上分析，$|f(z)|\equiv M$，从而对 $\forall z\in C+D$，均 $\exists\alpha(z)\in\mathbb{R}$，使得 $f(z)=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

12. *2020-2021 期末 T3 (4)*（压轴）设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$0<r<1$，证明：

(a). $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0\ (n\geqslant 1)$.

(b). 设 $\displaystyle f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $\displaystyle a_n=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\ (n\geqslant 1)$.

(c). $\displaystyle\overline{f(0)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$，其中 $|z_0|<r$.

解 (a). 由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数一致收敛于 $f(z)$. 记该级数为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. 由共轭运算的线性性与保持模不变的性质，对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+$，使得当 $n>N$ 时，满足

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\bar{z}^k-\overline{f(z)}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_kz^k-f(z)\right|<\varepsilon, \tag{43}$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n$ 也一致收敛于 $\overline{f(z)}$，从而该积分和无穷求和可交换. 而在 $|z| = r$ 上，$r^2 = z\bar{z}$，因此

$$\int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{|z|=r} \frac{\bar{z}^m}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{2m} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z^{m+n+1}}. \tag{44}$$

由于 $n \geqslant 1$，故 $m + n + 1 \geqslant 2 > 1$，因此 $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z^{m+n+2}} \equiv 0$，证得

$$\int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = 0. \tag{45}$$

(b). 利用上一问的结论和 Cauchy 积分公式，当 $n \geqslant 1$ 时，将 Taylor 级数的系数改写为：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{u(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \,. \end{aligned} \tag{46}$$

(c). 沿用第 (1) 问的结果，$\overline{f(0)} = \bar{a}_0$，且

$$\int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^{2n} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z^n (z - z_0)}. \tag{47}$$

当 $n \geqslant 1$ 时，由 Cauchy 积分公式，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z^n (z - z_0)} = \frac{1}{z_0^n} + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left. \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(z - z_0)^n} \right|_{z=0} = 0, \tag{48}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} \mathrm{d}z = \frac{\bar{a}_0}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \bar{a}_0 = \overline{f(0)}. \tag{49}$$

13. *2021-2022 期末 T1 (2)* 曲线 $|z - 1| = 1$ 在函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 下的像为（写出表达式）_____.

解 记 $w = 1/z = u + \mathrm{i}v$，其中 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $x = u/(u^2 + v^2), y = -v/(u^2 + v^2)$，曲线方程化为：

$$1 = |z - 1|^2 = (x - 1)^2 + y^2 = \left(\frac{u}{u^2 + v^2} - 1 \right)^2 + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = 1 + \frac{1 - 2u}{u^2 + v^2}, \tag{50}$$

即 $u = 1/2$，为 w 平面上的直线 $\operatorname{Re} w = 1/2$.

14. *2021-2022 期末 T1 (4)* 如果函数 $f : D \to G$ 是区域 D 到区域 $G = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ 的解析函数，那么 $\arg f(z)$_____（填写“是”或“否”）为调和函数.

解 由于 $w = f(z)$ 解析，且 $\operatorname{Re} w > 0$，即 $|w| \geqslant |\operatorname{Re} w| > 0$，则 $\ln f(z) = \ln |f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$ 也解析，从而其虚部 $\arg f(z)$ 为调和函数.

15. *2021-2022 期末 T2 (3)* 设 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>-\dfrac{1}{2}\right\}$，设 γ 为区域 D 内从 0 到 1 的不经过 i 的任意简单曲线，计算积分 $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

解 记 Γ 为从 0 到 i 的直线段，闭路 C 为 γ 与 Γ 相连形成的正向曲线，则

$$\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\xlongequal{z=x\ (0\leqslant x\leqslant 1)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}. \tag{51}$$

被积函数 $1/(1+z^2)$ 的奇点 i 和 $-\mathrm{i}$ 前者在 D 内，后者不在，即 C 所包围的区域内至多包含奇点 i. 以下分两种情况讨论：

(a). 点 i 不在 C 所围成的区域内，则由 Cauchy 积分定理，

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=0\quad\Longrightarrow\quad\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}. \tag{52}$$

(b). 点 i 在 C 所围成的区域内，此时必定有 $C=\Gamma+\gamma^-$. 由 Cauchy 积分公式，

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}=\pi\quad\Longrightarrow\quad\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\left(\int_\Gamma-\int_C\right)\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=-\frac{3\pi}{4}. \tag{53}$$

16. *2021-2022 期末 T2 (4)* 计算积分 $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.

解 记 C 所包围的区域为 D，则分四种情况讨论.

(a). $0,1\notin D$，则记此时闭路为 C_0，由 Cauchy 积分定理，

$$\int_{C_0}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=0. \tag{54}$$

(b). $0\in D$ 且 $1\notin D$，则记此时闭路为 C_1，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}. \tag{55}$$

(c). $0\notin D$ 且 $1\in D$，则记此时闭路为 C_2，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_{C_2}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(-\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)\bigg|_{z=1}=-2\pi\mathrm{e}\mathrm{i}. \tag{56}$$

(d). $0,1\in D$，则记此时闭路为 C_3，由多连通域的 Cauchy 积分定理，

$$\int_{C_3}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=-2\pi(\mathrm{e}-1)\mathrm{i}. \tag{57}$$

17. *2021-2022 期末 T2 (5)* 计算积分 $\displaystyle\int_0^\pi\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\cot(z+\pi)=\frac{\cos(z+\pi)}{\sin(z+\pi)}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z+\pi)}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z+\pi)}-1}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}=\cot z, \tag{58}$$

因此

$$\int_\pi^{2\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i}+\pi)\,\mathrm{d}(x+\pi)=\int_0^\pi\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x\,, \tag{59}$$

即 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$. 记 $z=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+1-2\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{4+2\mathrm{i}(x+1)}$ $(0\leqslant x<2\pi)$，则取正向闭曲线 $C:|z|=\mathrm{e}^4$，由 Cauchy 积分公式，

$$\int_0^{2\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x=\int_C\mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\int_C\frac{z+1}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(-1+2)=2\pi\mathrm{i},\tag{60}$$

因此原积分为

$$\int_0^{\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}=\pi\mathrm{i}.\tag{61}$$

18. *2021-2022 期末 T3 (4)*（压轴）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $\left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $\left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\leqslant 3, \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 证明：

$$|f(0)|\leqslant\sqrt{6}.\tag{62}$$

解 在 $|z|=1$ 上，考虑解析函数 $f(z)f(h(z))$ 或 $f(z)\overline{f(h(z))}$，希望 $\arg z, \arg h(z)$ 分别在 $[0,\pi)$ 和 $[\pi,2\pi)$ 两个区间内取值，且 $h(0)=0$. 这样两个函数的模在对应区间上的最大值分别为 2 和 3，乘积恰好为待证结论中 $|f(0)|^2$ 的上限. 有两种考虑：$\arg z\to-\arg z$ 和 $\arg z\to\pi+\arg z$. 前者可构造 $h(z)=\bar{z}$，对应解析函数为 $f(z)\overline{f(\bar{z})}$. 但后续证明较繁琐，请同学们自行尝试. 后者可构造 $h(z)=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-z$，对应解析函数为 $g(z)=f(z)f(-z)$. 显然 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，由最大模原理，

$$|f(0)|^2=|g(0)|\leqslant\left.|g(z)|\right|_{|z|=1}=\left.|f(z)||f(-z)|\right|_{|z|=1}\leqslant 2\times 3=6,\tag{63}$$

即 $|f(0)|\leqslant\sqrt{6}$，上式第二个等号成立当且仅当存在模为 1 的 z_0，使得 $f(z_0)=2, f(-z_0)=3$ 或 $f(z_0)=3, f(-z_0)=2$.