数学分析 B2 第十一次习题课

邓嘉驹

更新：May 21, 2025

目录

1 知识回顾 **2**

1.1 n 重积分 2

1.2 曲线积分 2

1.3 曲面积分 3

1.4 第一型曲面积分的面元分析 3

1.5 第二型曲线和曲面积分中的常用公式 3

1.6 三维调和场的性质 4

2 作业选讲 **6**

3 教材习题 **8**

4 真题集萃 **12**

1 知识回顾

1.1 n 重积分

这一节貌似往年期末考试都没考察过，不过为了知识体系的完整性还是简单介绍一些（而且我也不敢说今年一定不考）. n 重积分的计算基本上和高中数列题思路差不多，就是寻找递推公式. 部分积分几次后根据规律计算结果的解法实际上属于不完全归纳法，不是很严格. 这里仅通过一道作业题简单讲解一下.

例 1.1 (10.4.1(2)) 计算 n 重积分

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n}(x_1+\cdots+x_n)^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\,. \tag{1.1}$$

解 记原积分为 I_n，则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^1\left[x_n^2+2x_n\sum_{i=1}^{n-1}x_i+\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2\right]\mathrm{d}x_n\\
&= \int\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left[\frac{1}{3}+\sum_{i=1}^{n-1}x_i+\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\\
&= \frac{1}{3}+\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 x_i\,\mathrm{d}x_i+I_{n-1}=I_{n-1}+\frac{3n-1}{6},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

容易计算 $I_1=1/3$，因此

$$I_n=I_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{3k-1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{(3n+4)(n-1)}{12}=\frac{n(3n+1)}{12}. \tag{1.3}$$

1.2 曲线积分

对于任一空间曲线，其上任一点的位矢记为 $\boldsymbol{r}$，常见表示有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{（直角坐标系）} \tag{1.4}$$

$$=\mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{（柱坐标系）} \tag{1.5}$$

$$=\mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{（球坐标系）}. \tag{1.6}$$

这些结果可由对应坐标系下的 Nabla 算子给出，也可结合几何图像、分析 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在三个坐标基矢的投影更直观地看出，具体采用何种坐标取决于曲线表达式在哪种坐标系下表示最简洁（包括参数方程形式）. 特别地，对于交面式这种稍微隐晦些的表示，可对交面作全微分，解出 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 关于 $\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}z$ 关于 $\mathrm{d}\rho$ 的函数等.

第一型曲线积分与第二型曲线积分的区别在于是标量场（函数）还是向量场（函数）在曲线上的作用. 对于前者，典型例子如计算任意质量密度分布的曲线的质量，其被积函数为密度函数，微元仅包含曲线上无限接近两点的位矢差的模长信息，即为 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$.

对于后者，典型例子如力产生一定位移后做功如何，其被积函数为力的形式，微元包含方向信息（因此存在做负功的情况），即为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 这样也容易理解为何在第二型曲线积分中的奇偶对称性与先前的相反. 例如对于关于 x 对称的力和做功路径而言，在对称位置力的方向不变，但做功方向相反，因此这两部分功的贡献抵消.

1.3 曲面积分

对于任一空间曲面，其上任一点的位矢记为 $\boldsymbol{r}(u,v)$. 想象该曲面上 u,v 分别为常数的一系列曲线将其划分为充分多的网格，因此任一近似为平行四边形的面元，其两条不平行的边的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u$ 和 $\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v$，因此有向面元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，常见表示有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{z}} && \text{（直角坐标系）} && (1.7)\\
&= \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{z}} && \text{（柱坐标系）,} && (1.8)\\
&= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} && \text{（球坐标系）.} && (1.9)
\end{aligned}$$

同样地，这些结果可由对应坐标系下的 Nabla 算子给出，但更建议结合上一小节通过几何直观分析得到的弧元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在三个坐标基矢上的投影直接计算此处的有向面元. 对于以方程形式给出的曲面表达式，如 $F(x,y,z)=0$，任取两个变量为参数即可.

第一型曲面积分和第二型曲面积分的差异与上一小节的讨论类似，在此不作赘述，总之两者的微元分别分为 $\mathrm{d}S=|\mathrm{d}\boldsymbol{S}|$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，具体例子如面分布的物体质量和静电场的电通量. 需要提醒的是，第一型曲面积分的奇偶对称性和“重积分”章节中的一致，而第二型的则相反，其思路与上一小节的讨论类似.

1.4 第一型曲面积分的面元分析

在第一型曲面积分中，常见表述为“A 曲面被 B 曲面所截的部分”，或者“A 曲面与 B 曲面相交所围成的曲面”. 为了防止混淆用何种曲面作为面元“基底”，这里给出一种清晰的判断方式. 对于前一表述，我们区分 A,B 曲面分别为*被截曲面*和*截面*. 被截曲面作为面元计算的基底，在减少变量时使用的曲面即 A 曲面；减少变量相当于对面元做投影操作，例如以 $\mathrm{d}S=f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 就是将面元投影到 xOy 平面上，因而截面的作用是限制投影后在投影面上的积分区域. 对于后一表述，两曲面互为被截曲面和截面，分段积分时加以区分即可.

1.5 第二型曲线和曲面积分中的常用公式

考试中目前出现的第二型曲线积分均不需要补线，直接使用 Stokes 公式即可；而第二型曲面积分往往需要补面才能使用 Gauss 公式，补面时需要注意：(1) 指出曲面方程；(2) 指出曲面取向；(3) 指出补面和原曲面共同围成取向相同（内侧或外侧法向）的闭曲面；(4) 利用定义单独计算补面上的积分值.

值得一提的是，尽管教材上习惯用 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 和 $P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的形式，但更推荐大家采用有向线元和面元的形式：$(P,Q,R)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $(P,Q,R)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 一方面是考虑到形式的简洁性，另一方面写成这种形式便于应用场论公式. 考试中常用的公式如下.

1. Gauss 公式：对于单连通闭区域 Ω 有

$$\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{A}. \tag{1.10}$$

   Stokes 公式：对于曲面 S 有

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_{S}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,. \tag{1.11}$$

   Green 公式（可视为二维的 Stokes 公式）：对于单连通闭区域 D 有

$$\oint_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{D}(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1.12}$$

2. 位矢的一阶微分：

$$\nabla r=\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{r}}{r},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\quad \nabla\times\boldsymbol{r}=0,\quad \nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=4\pi\delta(\boldsymbol{r}). \tag{1.13}$$

3. Leibniz 公式：详见《场论基础》讲义，例如 $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}$，注意 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ 十分特殊；链式法则：详见《场论基础》讲义，例如 $\nabla f(r)=f'(r)\hat{\boldsymbol{r}}$.
4. 以下两个公式为 Gauss 定理的直接推论，但熟悉其形式有助于在题目中辨认类似结构、从而容易构建思路. Green 第一公式：

$$\oiint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+u\nabla^2 v)\,\mathrm{d}V\,, \tag{1.14}$$

   Green 第二公式：

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}V\,, \tag{1.15}$$

   且以上公式均适用于二维情形.
5. 场的二阶微分（恒等式）：

$$\nabla\times\nabla\varphi=0,\quad \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0. \tag{1.16}$$

   即梯度场的旋度为零（如静电场），旋度场的散度为零（如磁场）.

1.6 三维调和场的性质

三维调和场即满足

$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \tag{1.17}$$

的标量场 $f(x,y,z)$. 关于调和场若干重要的性质如下.

1. 介值性:在闭区域 Ω 内部任意选取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心,作一半径为 R 的球体 $B(P_0, R)$,则调和场在 P_0 的函数值为其在球面上函数值的均值,即

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B(P_0,R)} f(P)\,\mathrm{d}S\,. \tag{1.18}$$

证明. 设空间内任一点 P 相对 P_0 的径矢为 $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$,$\hat{\boldsymbol{r}}$ 也即球面某一外法向. 考虑一半径为 $\varepsilon < R$ 的球体 $B(P_0, \varepsilon)$,记空间区域 $\Omega = B(P_0, R) - B(P_0, \varepsilon)$,则在 Ω 内,由 Green 第二公式,

$$\iint_{\partial\Omega} \left(f(P)\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla f(P) \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \left(f(P)\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla^2 f(P) \right) \mathrm{d}V = 0, \tag{1.19}$$

其中分别利用了不含原点的区域内 $\nabla^2(1/r) = 0$ 以及调和场满足的条件. 另一方面,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} \left(f(P)\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla f(P) \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} \nabla f(P) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{B(P_0,\varepsilon)} \nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S\,,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

这在 $B(P_0, R)$ 内也成立,因此

$$\frac{1}{R^2} \iint_{\partial B(P_0,R)} f(P)\,\mathrm{d}S = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B(P_0,\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4\pi f(M) = 4\pi f(P_0), \tag{1.21}$$

其中倒数第二个等号用到了积分中值定理.

2. 最值性:非常值调和场在闭区域 Ω 内部无最值,最值仅能在边界 $\partial\Omega$ 上取到.

   证明. 容易由介值性导出,不作赘述.

3. Liouville 定理:若 f 为 $\mathbb{R}^3$ 上的调和场且存在最值,则其为常数函数. 证明复变函数课程会学习,或者参见课程教材严镇军《复变函数》.

以上结论同样适用于二维以及更高维的调和场,证明思路类似.

2 作业选讲

1. (10.3.14) 有一个匀质薄板，它是由半径为 a 的一个半圆和一个长方形拼接而成，为了使重心正好在圆心上，问长方形的宽 b 应为多少？

   解 直接积分即可，这里引入一个简单的结论——帕斯卡定理，其内容为质量在平面上均匀分布的物体，其绕任一轴旋转得到的旋转体体积恰好为其面积与质心路径长度的乘积. 证明是容易的，这里直接进行应用，将半圆绕直径旋转一周得到半径为 a 的球. 由对称性，半圆质心与直径垂直的半径上，其到直径的距离设为 s，则由帕斯卡定理，

$$2\pi s\cdot\frac{\pi a^2}{2}=\frac{4\pi}{3}a^3\quad\Longrightarrow\quad s=\frac{4a}{3\pi}. \tag{2.1}$$

2. (Ch10.3) 设 $a>0,b>0$. 试求下面的积分：

   (1) $I_1=\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$

   (2) $I_2=\displaystyle\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$

   解 学习复变函数后，可对此积分进行更简洁的处理. 由 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，

$$\begin{aligned}I_2+\mathrm{i}I_1&=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln x}\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^{y-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y+1-\mathrm{i}}=\ln\frac{b+1-\mathrm{i}}{a+1-\mathrm{i}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

   将积分结果表示为指数式 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，对其取对数函数的主值（暂且不用太关心什么是主值），其实部和虚部分别对应 I_2,I_1，即

$$I_2=\frac{1}{2}\ln\frac{(b+1)^2+1}{(a+1)^2+1},\quad I_1=\arctan\frac{1}{b+1}-\arctan\frac{1}{a+1}. \tag{2.3}$$

3. (11.1.1) 计算下列曲线的弧长.

   (5) $4ax=(y+z)^2$ 与 $4x^2+3y^2=3z^2$ 的交线，由原点到点 $M(x,y,z)$ $(a>0,z\geqslant 0)$.

   解 参见第九周作业解答，关键点其一在判断 $z+y\geqslant 0$，其二在判断后用平方差公式直接得到 $z\pm y$，进而整体计算得到

$$(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{d}z+\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)^2\right]. \tag{2.4}$$

4. (11.2.1) 求下列曲面在指定部分的面积.

   (7) 螺旋面 $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=h\varphi$ 在 $0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi$ 那部分.

   解 参见第九周作业解答，这里主要是介绍螺旋面.

5. (11.2.2) 计算下列曲面积分.

   (5) $\displaystyle\iint_S(x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\,\mathrm{d}S$，$S$：圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分.

   解 参加第九周作业解答，这里是强调积分前先化简被积函数，以及给出区分被截曲面和曲面的例子.

6. (11.3.1) 计算下列第二型曲线积分.

(5) $\int_L \mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}z$，$L$ 是 $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = \varphi/\pi$ 从点 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,1,1/2)$.

解 注意不必一上来就代入参数方程，容易看出被积函数为全微分 $\mathrm{d}\mathrm{e}^{x+y+z}$，因此

$$\text{原式} = \mathrm{e}^{x+y+z}\Big|_{(1,0,0)}^{(0,1,1/2)} = \mathrm{e}^{3/2} - \mathrm{e}. \tag{2.5}$$

7. (11.3.7) 设 D 是平面上由简单闭曲线 L 围成的区域.

(1) 如果 $f(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.6}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 L 的单位外法向量，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 称为二维 Laplace 算子. 因此，当 f 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 时，有 $\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = 0$.

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是单位常值向量，证明：

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0. \tag{2.7}$$

(3) 如果 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明下列第二 Green 公式：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.8}$$

证明. (1) 设二维曲线单位法向 $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$，那么其逆时针方向的切向位矢微元为

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x), \tag{2.9}$$

因此由 Green 公式，

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \oint_K \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_L -f_y\,\mathrm{d}x + f_x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (f_{xx} + f_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{RHS}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

(2) 记 $\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = (a_x, a_y)$，则由第 (1) 问的结论，

$$\text{LHS} = \oint_L \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\,\mathrm{d}s = \oint_L -a_y\,\mathrm{d}x + a_x\,\mathrm{d}y = 0 = \text{RHS}. \tag{2.11}$$

(3) 由第 (1) 问的结论，

$$\text{LHS} = \oint_L -(vu_y - uv_y)\,\mathrm{d}x + (vu_x - uv_x)\,\mathrm{d}y = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{RHS}. \tag{2.12}$$

3 教材习题

1. (Ch10.7) 证明：$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t.$

证明. 作变量代换 $\begin{cases}t=xy,\\ s=y,\end{cases}$ 即要求证明

$$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t\int_t^1\frac{\mathrm{d}s}{s}=-\int_0^1 t^t\ln t\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.1}$$

这等价于

$$\int_0^1 t^t(1+\ln t)\,\mathrm{d}t=0. \tag{3.2}$$

事实上，$\mathrm{d}t^t=\mathrm{d}\left[\exp(t\ln t)\right]=t^t(1+\ln t)\,\mathrm{d}t$，因此

$$\int_0^1 t^t(1+\ln t)\,\mathrm{d}t=t^t\Big|_0^1=1-\lim_{t\to0^+}\exp(t\ln t)=1-1=0. \tag{3.3}$$

2. (Ch10.9) 设 f 是连续可导的单变量函数. 令 $F(t)=\iint_{[0,t]^2}f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 求证：

(1) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,t]^2}xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).$

(2) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\int_0^{t^2}f(s)\,\mathrm{d}s.$

证明. (1) 作变量代换 $\begin{cases}x=tu,\\ y=tv,\end{cases}$ 可得 $F(t)=t^2\iint_{[0,1]^2}f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，从而其一阶导为

$$\begin{aligned}F'(t)&=2t\iint_{[0,1]^2}f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+t^2\iint_{[0,1]^2}2tuvf'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=\frac{2}{t}\left(F(t)+t^2\iint_{[0,1]^2}(tu)(tv)f'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)\\&=\frac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,1]^2}xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

(2) 作变量代换 $\begin{cases}s=xy,\\ r=y,\end{cases}$ 可得

$$F(t)=\int_0^{t^2}f(s)\,\mathrm{d}s\int_{s/t}^t\frac{\mathrm{d}r}{r}=2\ln t\int_0^{t^2}f(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t^2}f(s)\ln s\,\mathrm{d}s\,, \tag{3.5}$$

$$F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2}f(s)\,\mathrm{d}s-4t\ln t f(t^2)-2t\cdot f(t^2)\ln t^2=\frac{2}{t}\int_0^{t^2}f(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.6}$$

3. (11.2.6) 一个半径为 R 的均匀球壳（密度为 ρ）绕其直径旋转，求它的转动惯量.

解 首先给出垂直轴定理（对称性）：

$$\begin{aligned} I_{xx}+I_{yy}+I_{zz} &= \iint_S [(y^2+z^2)+(z^2+x^2)+(x^2+y^2)]\rho\,\mathrm{d}S \\ &= 2\rho R^2 \iint_S \mathrm{d}S = 8\pi\rho R^4. \end{aligned} \tag{3.7}$$

注意到球面的各向同性，$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$，因此 $I_{zz}=8\pi\rho R^4/3$.

4. (11.3.3) 设一质点处于弹性力场中，弹力方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，比例系数为 k，若质点沿椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 从点 $(a,0)$ 移动到点 $(b,0)$，求弹性力所做的功.

解 这一题主要是为了强调向量表示的重要性. 我们在力学中已了解到不含时有心力场[1]必然对应一个势场，因此被积函数必然为一全微分，由此构建思路. 弹性力做功：

$$W=\int_L \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_L k\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{k}{2}\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = -\frac{k}{2}(b^2-a^2). \tag{3.8}$$

5. (11.5.2) 求引力场 $\boldsymbol{F}=-km\boldsymbol{r}/r^3$ 通过下列闭曲面外侧的通量：
   (1) 空间中任一包围质量 m（在原点）的闭曲面.
   (2) 空间中任一不包围质量 m 的闭曲面.
   (3) 质量 m 在光滑的闭曲面上.

解 前两问直接用 Gauss 定理，分别计算得 $-4\pi km$ 和 0. 对于第三问，注意到

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -km\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2} = -km\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{3.9}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$，$\Omega$ 为立体角. 由于质点 m 在闭曲面上，其对闭曲面所张立体角即该处切平面一侧半空间对应立体角，为全空间立体角 Ω 的一半，因此 $\displaystyle\int_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-2\pi km$.

注 不依赖于坐标系的三维立体角元定义为

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}. \tag{3.10}$$

立体角元在几何上为面元对对定点的张角，作为类比，平面角元作为二维立体角，也是弧元对定点的张角. 对于任意面元，将其在球坐标基矢下表示，仅提取其 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向分量，可得

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,, \tag{3.11}$$

因此全空间立体角

$$\Omega_{\text{total}} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi \tag{3.12}$$

恰好为三维空间中单位球的面积.

6. (11.7.12) 求解微分方程.

[1]反例如氢原子模型的经典图像

(2) $2xy\,\mathrm{d}x + (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$

解 避免思维惯性，不必硬结合 Green 公式乘因子 $\mu(x,y)$ 凑势函数，这样会转化为求解一阶线性偏微分方程的问题. 这里直接用一阶线性齐次微分方程的方法即可，即令 $y = u(x)x$，可得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2u}{1-u^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u^2\,, \tag{3.13}$$

从中解得

$$\frac{1}{C^2} = \frac{u^2}{(1+u^2)^2x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad\Longrightarrow\quad x^2 + (y \pm R)^2 = R^2, \tag{3.14}$$

可见这是一个圆的方程.

7. (Ch11.4) （Poisson 公式）设 $S: x^2+y^2+z^2=1$，$f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，求证：

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{3.15}$$

证明. 考虑正交变换 $(x,y,z)^T = \boldsymbol{A}(u,v,w)^T$，其中 $u = (ax+by+cz)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = |\det(\boldsymbol{A})| = 1,$$

$$x^2+y^2+z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} AA^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u^2+v^2+w^2, \tag{3.16}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_S f(ax+by+cz) &= \iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{3.17}$$

8. (Ch11.5) 设 $S(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分，且

$$F(x,y,z) = 1 - (x^2+y^2+z^2). \tag{3.18}$$

求证：当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时，有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2. \tag{3.19}$$

证明. 易知 $S(t)$ 为小圆，记球心到小圆圆心的位矢为 $\boldsymbol{h}(t)$，则由点到平面的距离公式可得

$$h(t) = |\boldsymbol{h}(t)| = \frac{|t|}{\sqrt{3}}. \tag{3.20}$$

在小圆上取平面极坐标系，其位矢为 $\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$，则球心到小圆上一点的位矢为

$$(x,y,z)=\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}(t)+\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \Longrightarrow x^2+y^2+z^2=h^2(t)+\rho^2, \tag{3.21}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{1-h^2(t)}}\left[1-h^2(t)-\rho^2\right]\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\cdot\frac{[1-h^2(t)]^2}{4}=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

9. (Ch11.6) 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续，证明：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{3.23}$$

证明. 采用球坐标：

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi} f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

考虑正交变换 $(x,y,z)^T=\boldsymbol{A}(u,v,w)^T$，其中 $u=(ax+by+cz)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，仿照 Ch11.4 的分析可进一步化简：

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{1}{3}\iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{3.25}$$

4 真题集萃

1. (23-24 期末 $T_1(3)$) 计算曲面积分 $I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$，这里 S 是螺旋面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,v)$，其中 $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

   解 选择这道题是配合作业题 11.2.1 (7) 对螺旋面面积的计算——有了对螺旋面的直观图像，这里计算会容易些. 计算面元：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=(\sin v,-\cos v,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}S=\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \tag{4.1}$$

   因此

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}v\,\mathrm{d}v\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\pi^2\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]. \tag{4.2}$$

2. (23-24 期末 T_5) 计算

$$I=\oint_L\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}, \tag{4.3}$$

   其中 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

   解 这类题相当套路化，特征是分母形式为 $a^2x^2+b^2y^2$，L 所包围的区域含该形式的奇点，即原点 $(0,0)$. 这里取分母的正向等值线 $C:x^2+4y^2=r^2\leqslant 1$，那么

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}&=\frac{1}{r^2}\oint_C(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{Green 公式}}\frac{2}{r^2}\iint_{x^2+4y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=\pi.\end{aligned} \tag{4.4}$$

   在 L 与 C 所包围的区域内使用 Green 公式：

$$\oint_{L+C^-}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_D\left[\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}-\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0. \tag{4.5}$$

   因此

$$I=\oint_{L+C^-+C}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)}{x^2+4y^2}=0+\pi=\pi. \tag{4.6}$$

3. (22-23 期末 T_8) 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有二阶连续偏导数，并且对任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=f(P_0), \tag{4.7}$$

   其中 S 是以 P_0 为球心、r 为半径的球面. 求证：f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{4.8}$$

证明. 记 $S(\varepsilon)$ 为以 P_0 为球心、$\varepsilon \leqslant r$ 为半径、方向沿法向向外的有向闭曲面，并记 $\Omega(\varepsilon)$ 为 S 与 $S^-(\varepsilon)$ 包围的空间，其中 ε 极小. 又记 $P(x,y,z)$ 为空间内任一场点，且 $\overrightarrow{P_0P} = \boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$，其中单位径矢 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 恰好为 $\boldsymbol{r}$ 与球面 S 和 $S(\varepsilon)$ 交点处的单位法向量. 利用 Green 第二恒等式，

$$\iint_{S+S^-(\varepsilon)} \left(f\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla f\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega(\varepsilon)} \left(f\nabla^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla^2 f\right)\mathrm{d}V\,. \tag{4.9}$$

注意到 $1/r^2$ 在 Ω 内无奇点，因此 $\nabla^2(1/r) = 0$，即等式右侧第一项为 0. 另一方面，

$$\begin{aligned}\iint_{S(\varepsilon)} \left(f\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla f\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\iint_{S(\varepsilon)} f(P)\frac{\mathrm{d}S}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon}\iint_{S(\varepsilon)} \nabla f(P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S(\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2} \nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

这一结果对于曲面 S 也成立，将以上结果代入(4.9)式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\iint_S f(P)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{r}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V \\ =&\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S(\varepsilon)} f(P)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2} \nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V - \iiint_{\Omega(\varepsilon)} \frac{1}{r}\nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V\right) \\ =&\lim_{\varepsilon\to0^+} 4\pi f(M_1) - \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{4\pi}{3}\varepsilon^2\nabla^2 f(M_2) - \lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \frac{1}{r}\nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V \\ =&4\pi f(P_0) - \lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \frac{1}{r}\nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V\,,\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中倒数第二行用到了积分中值定理，最后一行用到了 $f(P)$ 具有二阶连续偏导数的条件. 利用 $f(P)$ 具有二阶连续偏导数的条件，可知

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2} \nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3\nabla^2 f(M_3) = 0, \tag{4.12}$$

将介值性的条件代入，(4.11)式可化为

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{4\pi}{3}(r^3-\varepsilon^3)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{|P_0M_4|}\right)\nabla^2 f(M_4) \\ &= \frac{4\pi}{3}r^3\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{|P_0M_4'|}\right)\nabla^2 f(M_4').\end{aligned} \tag{4.13}$$

再次利用 $f(P)$ 具有二阶连续偏导数的条件，对于 $\forall P_0 \in \mathbb{R}^3$ 与 $\forall r > 0$，均有

$$\nabla^2 f(M_4') = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla^2 f(P_0) = \lim_{r\to0^+}\nabla^2 f(M_4') = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla^2 f(P) = 0, \tag{4.14}$$

其中最后一步用到了 P_0 在 $\mathbb{R}^3$ 上的任意性.

4. (20-21 期末 $T_3(2)$) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D: x^2+y^2 \leqslant \pi$ 上有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin\left(x^2+y^2\right), \tag{4.15}$$

$\boldsymbol{n}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向，计算曲线积分 $\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$.

解 参考作业题 11.3.7 的思路，设曲线上某一线元的单位法向为 $\hat{\boldsymbol{n}} = (\cos\beta, \sin\beta)$，则其对应的正向线元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s = (-\sin\beta, \cos\beta)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \tag{4.16}$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = (\cos\beta, \sin\beta)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x), \tag{4.17}$$

因此原式可化为

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial D} \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s &= \oint_{\partial D} u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{Green 公式}} \iint_D (u_{xx} + u_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \sin\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{极坐标}} 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin\rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi.\end{aligned} \tag{4.18}$$

5. (20-21 期末 T_6) 计算曲线积分

$$I = \oint_L (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,, \tag{4.19}$$

其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线 $(z \geqslant 0)$，从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

解 采用 Stokes 公式可得

$$I = 2\iint_S (y - z, z - x, x - y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{4.20}$$

其中有向曲面 S 取为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 上被 L 包围的区域，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \frac{(x-2, y, z)}{2}\,\mathrm{d}S = \frac{(x-2, y, z(x,y))}{2} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(x-2, y, z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

注意到 S 关于 x, y 对称，因此

$$I = \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1} \frac{2(z(x,y) - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}} = 2\iint_{(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi. \tag{4.22}$$

6. (20-21 期末) 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且对任一点 (x_0, y_0) 为圆心，任意 $r > 0$ 为半径的半圆 $L: x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$，恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4.23}$$

证明：$P(x,y) = 0$, $\partial Q(x,y)/\partial x = 0$.

证明. 考虑从 $(x_0 - r, y_0)$ 到 $(x_0 + r, y_0)$ 的直线段 L_0，记 L 与 L_0 围成的区域为 D，取 L 为正向曲线，则由 Green 公式，

$$\iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{L_0 + L} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_0} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + 0 = \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} P(x, y_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.24}$$

利用积分中值定理，$\exists(\xi,\eta)\in D$ 且 $\exists\zeta\in(x_0-r,x_0+r)$，使得

$$(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=P(\zeta,y_0)\cdot 2r \quad\Longrightarrow\quad P(\zeta,y_0)=\frac{\pi}{4}r\,(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}. \tag{4.25}$$

注意到 P,Q 具有二阶连续偏导数，上式两端分别令 $r\to 0^+$，可得 $P(x_0,y_0)=0$. 再由 (x_0,y_0) 的任意性，可得对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均有 $P(x,y)=0$. 将其代入上式，类似可得

$$Q_x(\xi,\eta)=0 \quad\Longrightarrow\quad Q_x(x_0,y_0)=\lim_{r\to 0^+}Q(\xi,\eta)=0 \quad\Longrightarrow\quad Q_x(x,y)=0. \tag{4.26}$$

7. (19-20 期末 T_9) 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在单位圆盘 $U=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有一阶连续偏导数，且 $\partial f/\partial y=\partial g/\partial x$，证明：在单位圆周上存在一点 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

证明. 注意到偏导相等的条件可与 Green 公式结合，因此构造

$$\oint_{\partial U} f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y=\iint_U(g_x-f_y)=0. \tag{4.27}$$

在边界 ∂U 上，令 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$，可得

$$\begin{aligned}0=\oint_{\partial U} f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}[g(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-f(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta\\&=2\pi[g(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-f(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi],\end{aligned} \tag{4.28}$$

其中最后一行已用到积分中值定理，因此 $\exists(\xi,\eta)=(\cos\varphi,\sin\varphi)\in\partial U$，使得

$$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi. \tag{4.29}$$

8. (19-20 期末 T_{10}) 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{4.30}$$

计算

$$I=\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{4.31}$$

解 利用 Leibniz 法则，可将被积函数写为

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla f=\frac{1}{2}\nabla r^2\cdot\nabla f=\frac{1}{2}\nabla\cdot(r^2\nabla f)-\frac{1}{2}r^2\nabla^2 f, \tag{4.32}$$

对第一项使用 Gauss 定理：

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot(r^2\nabla f)=\iint_{\partial\Omega}r^2\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\partial\Omega}1\cdot\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega\nabla^2 f, \tag{4.33}$$

因此原积分化为

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega(1-r^2)\nabla^2 f\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\cdot 4\pi\int_0^1(1-r^2)r\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}. \tag{4.34}$$

9. (18-19 期末 T_4) 设

$$\boldsymbol{v} = \frac{y^2+z^2}{r^3}\boldsymbol{i} - \frac{xy}{r^3}\boldsymbol{j} - \frac{xz}{r^3}\boldsymbol{k} \tag{4.35}$$

是定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上的向量场，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$.

(2) 求向量场 $\boldsymbol{v}$ 的势函数.

解 将向量场化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{x}{r^3}(x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{x}{r^3}\boldsymbol{r} = \nabla\left(\frac{x}{r}\right),\end{aligned} \tag{4.36}$$

因此该向量场为梯度场，旋度自然为零，其势函数为 $x/r+C$，C 为某一待定常数.