数学分析 B2 第八次习题课（期中复习）

邓嘉驹

更新：April 16, 2025

目录

1 知识回顾 **2**

1.1 空间解析几何 2

1.2 多变量函数的微分学 5

1.3 多变量函数的重积分 10

2 应考技巧 **12**

2.1 定点偏导数的计算 12

2.2 利用等值面积分（重要） 12

2.3 柱坐标与球坐标换元的选择（重要） 13

2.4 典型换元 14

2.5 其他换元依据的表达式 15

3 真题集萃 **16**

1 知识回顾

1.1 空间解析几何

1. 向量的基本运算

1. 点乘：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.
2. 叉乘：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，其方向由右手螺旋定则确定. 坐标表示：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_b+a_yb_y+a_zb_z,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

3. (a). $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.
   (b). $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

2. 平面方程的构建

常见的构建方式有三种：

1. 截距式.
2. 点法式：$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PP_0}=0$，其中点 P_0,P 分别为平面上的定点和动点. 通常设法找到该平面上的两个向量，利用叉乘构建 $\boldsymbol{n}$.
3. 平面系方程：适用于绕过定直线的平面. 若该直线给的是交面式

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2. \tag{1.2}$$

则平面系方程为

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0, \tag{1.3}$$

其中 λ 可取到 ∞. 若该直线给的是点向式，则利用参数式构造两个平面方程即可.

3. 直线方程的构建

特征量即方向向量，通常设法找到直线某一法平面内两个向量，利用叉乘构建方向向量. 对于题设为平面交线的直线，也会使用表达更简便的交面式.

4. 空间中的位置关系

1. 平面间：平行即 $\boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2$，正交即 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$. 特别地，对于处于角平分线上的平面，可将法向量单位化为 $\boldsymbol{n}_1',\boldsymbol{n}_2'$，则该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1'\pm\boldsymbol{n}_2'$，直线类似.

2. 直线间：平行即 $\boldsymbol{\tau}_1 // \boldsymbol{\tau}_2$，正交即 $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 0$，异面即 $(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) \times \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$，其中 P_1, P_2 分别为两直线上的点.
3. 直线与平面：平行即 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$，包含即直线上任一点在平面上，相交即除此之外的情形. 特别地，正交满足 $\boldsymbol{n} // \boldsymbol{\tau}$.

5. 空间中的距离计算

原始公式：$d = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n}\right| / |\boldsymbol{n}|$ 和 $d = \left|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{\tau}\right| / |\boldsymbol{\tau}|$，两者分别是对于平面和直线而言的.

1. 两点间的距离公式.
2. 点面距离：$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
3. 点线距离：$d = |(x_0 - x_0', y_0 - y_0', z_0 - z_0') \times (l, m, n)| / \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.
4. 平行平面间距：$d = |D_1 - D_2| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
5. 平行直线间距：$d = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \times (l, m, n)| / \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.
6. 异面直线面间距：$d = \left|(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\right| / \left|(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)\right|$.

6. 常见二次曲面的识别

1. 柱面：在应试中出现基本上是母线平行于坐标轴的情形，trivial.
2. 锥面：在应试中基本以 $z^2 = x^2 + y^2$ 或 $z = (\pm)\sqrt{x^2 + y^2}$ 的形式出现，trivial.
3. 旋转曲面：某两个分量仅有二次项，且二次项系数相等，具体原因见旋转曲面的构建小小节.
4. 椭球面：$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
5. 双曲面：$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = \pm 1$，其中单叶和双叶分别对应于 $+1$ 和 -1. 一个比较简单的区分方法是，分别取 x, y, z 为零，单叶双曲面始终与坐标平面有交线，而双叶双曲面与其一坐标平面不相交（实际上对应这里的负项 $-z^2/c^2$）.
6. 椭圆抛物面：$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.
7. 双曲抛物面：$z = x^2/a^2 - y^2/b^2$.

7. 常用空间坐标系

柱坐标系：

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan(y/x), \\ z = z, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, +\infty)$，体积元

$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.5}$$

球坐标系：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right), \\ \varphi = \arctan(y/x), \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $r \in [0,+\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$，体积元

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{1.7}$$

1.2 多变量函数的微分学

1. 函数的极限与连续性

1. 极限：对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta(\varepsilon, M_0) > 0$，其中点 $M_0(x_0, y_0)$，使得当

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{或} \quad 0 < |x-x_0| < \delta,\ 0 < |y-y_0| < \delta \tag{1.8}$$

时，$0 < |f(x,y) - a| < \varepsilon$ 恒成立，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$.

当然，一般要用 ε-δ 语言证明极限存在时，通常用后者，因为近似线性的运算通常要来得更简单.

注 注意 δ 是与坐标点 M_0 相关的，对于不同坐标点下的 $\delta(M_0)$ 与 $\delta(M)$，可能并不存在统一的最小值 $\min\{\delta(M_0), \delta(M)\}$，参见第四次习题课讲解的习题 9.1 的第 19 题.

2. 连续：若 $a = f(x_0, y_0)$，则 $f(x,y)$ 在点 M_0 连续. 若对 D 上任一点满足 $\delta = \delta(\varepsilon)$（与坐标点无关），则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

2. 偏导数与可微性

1. 偏导数：

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \tag{1.9}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}. \tag{1.10}$$

类似可定义高阶偏导数. 若 $f(x,y) \in C^n(D)$，则 $f(x,y)$ 在 D 中 n 阶偏导可交换.

2. 可微：记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则

$$f(x,y)\text{在}M_0(x_0,y_0)\text{可微} \iff \lim_{\rho\to 0^+} \left.\frac{\Delta f - f_x \Delta x - f_y \Delta y}{\rho}\right|_{M_0} = 0. \tag{1.11}$$

3. 方向导数与梯度

1. 方向导数：记 $\boldsymbol{l} = l(\cos\alpha, \cos\beta)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0,y_0)}{t}, \tag{1.12}$$

几何上，方向导数即 $f(x,y)$ 在 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位增长率. 换言之，沿 $\boldsymbol{l}$ 方向增量 Δf 有多大，取决于方向导数与增量 t 的乘积.

2. 梯度：

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = f_x \hat{\boldsymbol{x}} + f_y \hat{\boldsymbol{y}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f \cdot \frac{\boldsymbol{l}}{l}. \tag{1.13}$$

梯度方向即 $f(x,y)$ 增长率（绝对值）最高的方向，因为 $|\partial f/\partial \boldsymbol{l}| \leqslant |\nabla f|$ 恒成立.

注 注意利用梯度计算方向导数时，方向向量 $\boldsymbol{l}$ 一定要单位化.

4. Jacobi 行列式

1. 常在重积分中利用二元和三元的 Jacobi 行列式，即

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left\|\begin{matrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{matrix}\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{1.14}$$

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left\|\begin{matrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{matrix}\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.15}$$

2. Jacobi 行列式的链式法则：

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{1.16}$$

3. 对于换元 $(x,y)\to(u,v)$，若变换形式为 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ 则通常如下计算 Jacobi 行列式：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^{-1} = \frac{1}{x_u y_v - x_v y_u}, \tag{1.17}$$

再反解代入 $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases}$

5. 隐函数偏导数的计算

1. 对于满足单一约束条件 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的变量组来说，若偏导数存在，则

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial_j F}{\partial_i F}, \quad i\neq j. \tag{1.18}$$

2. 对于双重约束的情形：$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$ 若计算 u_x 或 v_y 这种单个因变量的单个偏导数，则选取 u 与其他任一变量作为因变量（这里选择 v），对另外两个（自）变量求偏导即可：

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

利用此方程组分别解出 u_x, v_y 即可（这里不建议记书上的公式）.

若计算 $\mathrm{d}u$ 或 u_x, u_v 都需要计算，应将 $\mathrm{d}u$ 视为一个整体，对方程组取微分即可：

$$\begin{cases} F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v = 0, \\ G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_u\,\mathrm{d}u + G_v\,\mathrm{d}v = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

整体地计算出 $\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y$ 而不必拆成偏导分别计算两次.

3. 两个常用的偏微分公式（利用隐函数求导法则容易证明）：

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.21}$$

6. 二元函数 Taylor 公式

设 $f(x,y)\in C^{n+1}(D)$，其中凸区域 $D\in\mathbb{R}^2$，则

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}(h\partial_x+k\partial_y)^m\ f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}+R_n(x_0,y_0),\quad \text{where } h=x-x_0,k=y-y_0. \tag{1.22}$$

特别地，$n=0$ 情形对应二元中值定理：

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h+f_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k,\quad \text{where } \theta(x_0,y_0)\in(0,1). \tag{1.23}$$

关于二元函数 Taylor 展开的一些经验或技巧：

1. 在考试中通常只出现展开至二次的情形，若要求展开至三次及以上的情形，则通常会出现可整体换元的齐次变量（例如 $x+y,x^2+y^2$），利用单变量函数的展开公式即可.
2. 对于可分解的函数 $f(x,y)=g(x)h(y)$，分别考虑成 g 和 h 的单变量函数 Taylor 展开至对应结束即可，再将展开式相乘保留对应高阶项.

例 1.1 (9.5.4) 求下列函数的 Taylor 公式，并指出展开式成立的区域.

1. $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$，直到三阶为止.
2. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$，直到四阶为止.
3. $f(x,y)=1/(1-x-y+xy)$ 在点 $(0,0)$，直到 n 阶为止.

解 参见作业答案.

7. 函数极值判断

1. 无约束极值：通常为二元或三元函数. 以二元函数为例，计算 $f_x=f_y=0$ 的点 (x_0,y_0)，再计算

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}(x_0,y_0). \tag{1.24}$$

   (a). 若 $AC-B^2>0$，则 $A>0$ 时该点为函数的极小值，$A<0$ 时该点为函数的极大值[1].
   (b). 若 $AC-B^2<0$，该点并非极值点.
   (c). 若 $AC-B^2=0$，无法判断.
2. 有约束极值：通常为三元函数配单约束. 采用 Lagrange 乘子法，定义 Lagrange 函数

$$L(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z), \tag{1.25}$$

   再计算 L 关于各变量偏导为零的点[2]. 对于判断极值的部分，在应试中通常为最值判断（见下一小节讨论），因此比较各可疑点函数值大小即可.

[1]类比一元函数二阶导条件记忆
[2]通常解方程的方法是，利用前三式解出 $x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)$，代入最后一式即约束条件

注 (a). 若需要讨论是否为极值，注意到三元函数在单约束下退化为二元函数，此时可利用二元函数的极值条件判断. 例如若 $\varphi(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，即

$$z_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z},\quad z_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}, \tag{1.26}$$

那么[3]

$$\partial_x f=f_1+f_3z_x=f_1-\frac{f_3\varphi_x}{\varphi_z},\quad \partial_y f=f_2-\frac{f_3\varphi_y}{\varphi_z}, \tag{1.27}$$

进而可计算 $\partial_x^2 f,\partial_{xy}f,\partial_y^2 f$，回到无约束极值的情形.

(b). 对于目标函数含绝对值的情形，通常将其平方后定义为 f（例如有约束下求点到坐标平面的距离最值）.

8. 最值判断

在应试中通常更常出现的是这一类题，相比极值判断有三点需要注意：

1. 在题目不限制方法的情况下，最优先考虑不等式解法减少讨论，降低计算量. 常用的不等式有基本不等式与 Cauchy 不等式.
2. 对于闭域，优先考虑边界上可能的极值（边界上的边界点额外计算函数值），以免在内部讨论后遗漏.
3. 所有可能的最值点即所有可能的极值点加边界点，且判断最值时不用考虑是否为极值，比较各函数值确定何者最大最小即可.

例 1.2 (9.5.19) 椭球体 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1$ 的内接长方体中，求体积最大的长方体的体积.

解 由内接长方体的对称性，记第一卦限内的顶点为 (x_0,y_0,z_0)，则其体积为

$$V=8x_0y_0z_0=8abc\cdot\frac{x_0}{a}\cdot\frac{y_0}{b}\cdot\frac{z_0}{c}\leqslant 8abc\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}\right]^3=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}, \tag{1.28}$$

等号成立当且仅当 $x_0/a=y_0/b=z_0/c$，即 $x_0=a/\sqrt{3},\ y_0=b/\sqrt{3},\ z_0=c/\sqrt{3}$.

例 1.3 (Ch9-14) 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

解 1. 在边界 $x^2+y^2=2$ 上，$h(x)\overset{\Delta}{=\!=}g(x,\pm\sqrt{2-x^2})=x+x^2-x^3$ $(|x|\leqslant\sqrt{2})$，可能的极值点满足

$$h'(x)=1+2x-3x^2=0\quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{1}{3}\text{ or }1, \tag{1.29}$$

代入得

$$h(1)=1,\quad h\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27},\quad h(\pm\sqrt{2})=2\mp\sqrt{2}. \tag{1.30}$$

[3]这里不写成 f_x 是为了避免与 f_1 混淆

2. 在区域内部，可能的极值点满足

$$\begin{cases} f_x = 2x + y^2 - 1 = 0, \\ f_y = 2xy = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (0, \pm 1), (1/2, 0), \tag{1.31}$$

因此 $f(0, \pm 1) = 0,\ f(1/2, 0) = -1/4.$

对比各函数值可知，

$$f(x, y)_{\max} = f(-\sqrt{2}, 0) = 2 + \sqrt{2}, \quad f(x, y)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}. \tag{1.32}$$

例 1.4 (9.5.11(4)) 求函数 $z = x^2 y(4 - x - y)$ 在区域 $\{(x, y) | x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6\}$ 内的最大值与最小值.

解 1. 在边界 $x = 0$ 或 $y = 0$ 上，$z \equiv 0$.

2. 在边界 $x + y = 6$ 上，$z = 2x^2(x - 6)\ (0 < x < 6)$，则可能的极值点满足

$$z_x = 2(3x^2 - 12x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \quad \Longrightarrow \quad z(4, 2) = -64. \tag{1.33}$$

3. 在区域内部，可能的极值点满足

$$\begin{cases} z_x = y[2(4 - y)x - 3x^2] = 0, \\ z_y = x^2[(4 - x) - 2y] = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z(2, 1) = 4. \tag{1.34}$$

对比各可能的最值点函数值大小可知，

$$z_{\max} = z(2, 1) = 4, \quad z_{\min} = z(4, 2) = -64. \tag{1.35}$$

1.3 多变量函数的重积分

1. 积分性质

1. 关于被积函数的线性性：$\displaystyle\int_D c_1 f_1 + c_2 d_f \,\mathrm{d}\sigma = c_1 \int_D f_1 \,\mathrm{d}\sigma + c_2 \int f_2 \,\mathrm{d}\sigma.$
2. 关于积分区域的线性性：$\displaystyle\int_{D_1+D_2} f \,\mathrm{d}\sigma = \int_{D_1} f \,\mathrm{d}\sigma + \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\sigma.$
3. 不等关系的传递性：$f \geqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_D f \,\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_D g \,\mathrm{d}\sigma.$

   特别地，若在 D 上 $m \leqslant f \leqslant M$，则 $mA(D) \leqslant \displaystyle\int_D f \,\mathrm{d}\sigma \leqslant MA(D).$
4. $\left|\displaystyle\int_D f \,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \int_D |f| \,\mathrm{d}\sigma.$
5. 积分中值定理：$\exists(\xi,\eta) \in D$，使得 $\displaystyle\int_D f \,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A(\sigma).$

2. 积分的对称性（重要）

研究积分得对称性首先要求积分区域具有某种对称，其次才考虑被积函数相应的对称性. 除去常见的奇偶性，函数还可能具有交换（反）对称性和轮换对称性（常见于三元函数）.

1. 交换（反）对称性：$f(x,y,z) = (-)f(y,x,z).$
2. 轮换对称性：$f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y).$

值得注意的是，球坐标换元具体到变量时也会考虑轮换对称性. 除去形式为 $(x^2+y^2+z^2)$ 的项，若剩余单变量可考虑作换元 $r\cos\theta$（无论其是否为 z）以减少换元时引入变量的个数.

例 1.5 (10.3.3(8)) 计算 $\displaystyle\iiint_V (|x|+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $V: 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4.$

解 注意到 V 关于 x,y,z 均为偶函数，因此 $z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 对积分的贡献为零. 对于前一项，可将 x 换元为 $r\cos\theta$，则

$$\text{原式} = 2\pi \int_1^2 r^3 \mathrm{e}^{-r^2} \,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta|\cos\theta| \,\mathrm{d}\theta = \pi(2\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{-4}). \tag{1.36}$$

例 1.6 (10.2.4(4)) 计算 $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $V: r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant 0.$

解 记 $\Omega = \{(x,y,z) | r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$，由于被积函数与 z 无关，因此

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\iiint_\Omega \frac{(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)}{3} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{3}\cdot 4\pi \int_r^R (r')^4 \,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi}{15}(R^5 - r^5).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

3. 常用重积分换元

1. 广义极坐标换元：$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases}$ 面元变换为 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$. 广义柱坐标换元类似.
2. 广义球坐标换元：$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, \\ z = cr\cos\theta, \end{cases}$ 体积元变换为 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abcr^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

2 应考技巧

2.1 定点偏导数的计算

对于显式函数，容易想到先代入其他变量值化为单变量函数再求导. 但对于隐式函数，这一方法也是适用的.

例 2.1 (9.5.5) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，当 $x=1,y=1$ 时 $z=1$，试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 至二次项为止.

解 由题意，

$$z_x(1,1)=\left.\frac{2z}{3z^2-2x}\right|_{x=y=z=1}=2,\quad z_y(1,1)=\left.\frac{-1}{3z^2-2x}\right|_{x=y=z=1}=-1, \tag{2.1}$$

进而

$$z_{xx}(1,1)=2\left.\frac{2z-(3z^2+2x)z_x}{(3z^2-2x)^2}\right|_{x=y=z=1}=-16, \tag{2.2}$$

$$z_{yx}(1,1)=\left.\frac{6zz_x-2}{(3z^2-2x)^2}\right|_{x=y=z=1}=10, \tag{2.3}$$

$$z_{yy}(1,1)=\left.\frac{6zz_y}{(3z^2-2x)^2}\right|_{x=y=z=1}=-6, \tag{2.4}$$

因此二阶展开式为

$$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+R_2. \tag{2.5}$$

2.2 利用等值面积分（重要）

有时被积函数 f 与积分区域含有同一关于积分变量的整体形式 g. 此时可按 $g=\text{const}$ 的等值面划分积分区域，计算出元体积后积分即可.

例 2.2 计算 $\iint_D\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

解 考虑 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$ 与 $x=0,y=0$ 围成的区域面积：

$$A(t)=\int_0^{t^2}\left(t-\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)t^4=\frac{t^4}{6}, \tag{2.6}$$

因此

$$\iint_D\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t\,\mathrm{d}A(t)=\frac{2}{3}\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t=\frac{2}{15}. \tag{2.7}$$

例 2.3 计算 $\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)|x+y+z\leqslant 1,x,y,z\geqslant 0\}$.

解 考虑 $x+y+z=t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$，其与坐标平面围成的体积为 $V(t)=t^3/6$，因此

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}V(t)}{(1+t)^3}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^3}\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+t}-\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^3}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

例 2.4 (10.2.8) 证明：$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}f(z)\,\mathrm{d}V=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\,\mathrm{d}z.$

证明. 原式 $=\int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(z)\cdot\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z.$

2.3 柱坐标与球坐标换元的选择（重要）

基本上出现因子 $(x^2+y^2\pm z^2)$ 或曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 时，不用怀疑，先采用球坐标变换，比较典型的是配合圆锥面出现. 不过对于出现抛物面的情形，由于系统的旋转对称性更高，采用柱坐标可能会使计算更简便.

例 2.5 (10.3.3(3)) 计算 $\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 V 由 $\sqrt{4-x^2-y^2}=z,\ x^2+y^2=3z$ 围成.

解 作柱坐标变换，结合球面与抛物面的几何图像，积分区域化为 $z\leqslant\sqrt{4-\rho^2}$ 和 $z\geqslant\rho^2/3$. 边界相交可解得 $\rho_0=\sqrt{3}$，因此

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}z\,\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{9}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{13\pi}{4}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

例 2.6 (10.3.4(3)) 计算 $\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $V:x^2+y^2+z^2\leqslant x.$

解 作球坐标变换. 由于 x,y,z 具有轮换对称性，可取 $x=r\cos\theta$，则 $V:r\leqslant\cos\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$，因此

$$\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{10}.\tag{2.10}$$

例 2.7 (10.2.5(8)) 计算由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$ 围成的区域的体积.

解 作球坐标变换. 由于 x,y,z 具有轮换对称性，可取 $x=r\cos\theta$，则曲面方程化为 $r=a(\cos\theta)^{1/3}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$，因此

$$V(\Omega)=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a(\cos\theta)^{1/3}}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}a^3.\tag{2.11}$$

例 2.8 (Ch10-6) 计算曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围的体积 V.

解 作球坐标变换，则曲面方程化为 $r=[\sin\theta\sin\varphi/(\sin^4\theta+\cos^4\theta)]^{1/3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，因此

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{[\sin\theta\sin\varphi/(\sin^4\theta+\cos^4\theta)]^{1/3}}r^2\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\xlongequal{\theta\to\pi/2+\theta}\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\\&\xlongequal{x=\tan\theta}\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

2.4 典型换元

除去常见的柱坐标和球坐标换元，还有两类典型背景的换元.

1. 出现形如 $y^m=k_{1,2}x^n$ $(m,n\leqslant 2$且不同时取2)、$x+y=c_{1,2}$、$xy=t_{1,2}$ 的表达式时，通常将其整体换元.
2. 区域 $a|x|+b|y|\leqslant 1$ $(a,b>0)$. 取 $\begin{cases}u=ax+by,\\v=ax-by,\end{cases}$ 可将积分区域简化为 $|u|,|v|\leqslant 1$，Jacobi 行列式为 $1/2ab$.

例 2.9 (10.2.2(4)) 计算 $\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $y^2=ax$, $y^2=bx$, $x^2=my$, $x^2=ny$ 围成的区域 $(a>b>0,\ m>n>0)$.

解 记 $u=y^2/x, v=x^2/y$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}-y^2/x^2 & 2x/y\\ 2y/x & -x^2/y^2\end{matrix}\right\|^{-1}=\frac{1}{3},\tag{2.13}$$

此时积分区域为 $[b,a]\times[n,m]$，因此

$$\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(a-b)(m-n).\tag{2.14}$$

例 2.10 (10.2.3(2)) 计算由直线 $x+y=a$, $x+y=b$, $y=kx$, $y=mx$ $(0<a<b,\ 0<k<m)$ 围成的平面区域的面积.

解 记 $u=x+y$, $v=y/x$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}1 & -y/x^2\\ 1 & 1/x\end{matrix}\right\|^{-1}=\frac{x^2}{x+y}=\frac{[u/(1+v)]^2}{u}=\frac{u}{(1+v)^2},\tag{2.15}$$

此时积分区域为 $[a,b]\times[k,m]$，因此

$$A(D)=\int_a^b u\,\mathrm{d}u\int_k^m\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{1+k}-\frac{1}{1+m}\right).\tag{2.16}$$

例 2.11 (10.2.2(7)) 计算 $\iint\limits_D\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:|x|+|y|\leqslant 1$.

解 记 $u=x+y$, $v=x-y$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|^{-1} = \frac{1}{2}, \tag{2.17}$$

此时积分区域为 $[-1,1]\times[-1,1]$，因此

$$\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u+3}}\int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}v = 0. \tag{2.18}$$

例 2.12 (18-19 期中 T_7) 设 m 是自然数，求积分

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2-y^2)^m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.19}$$

解 记 $u=x+y$, $v=x-y$，则

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^m\,\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}v^m\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^m}{m+1}\right]^2 = \frac{2|\sin(m\pi/2)|}{(m+1)^2}. \tag{2.20}$$

2.5 其他换元依据的表达式

其他常见需要换元的表达式形如[4]$x^m\pm y^n=C$，其中 m,n 非偶数，C 为常数. 其换元依据的公式为

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\quad \frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1. \tag{2.21}$$

当然对于后者还有双曲三角换元. 因此对于正号，可取 $x^m=C\cos^2\theta$, $y^n=C\sin^2\theta$，然后计算 Jacobi 行列式再积分即可. 典型例子如星形线的面积计算.

[4]也就是说当这一形式都不含有时，基本可以放弃挣扎、在直角系里老老实实积分了

3 真题集萃

1. (18-19 期中 T_6) 求椭球

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1 \tag{3.1}$$

被平面 $x+y+z=1$ 分割得到的两块中，体积较小的那一块的体积.

解 联想到球的轮换对称性，作线性变换 $x=\sqrt{2}u$, $y=\sqrt{3}v$, $z=2w$，因此问题转化为单位球被平面 $\sqrt{2}u+\sqrt{3}v+2w=1$ 分割的较小一块的体积的 $2\sqrt{6}$ 倍. 该几何体恰好为球缺，可证明高 $(R-d)$、球半径为 R 的球缺体积为

$$\begin{aligned} V(\Omega') &= 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-d^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_d^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}z \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{R^2-d^2}}\left(\sqrt{R^2-\rho^2}-d\right)\mathrm{d}\rho^2 \\ &= \frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2d+d^3). \end{aligned} \tag{3.2}$$

代入球心到平面的距离 $d=1/3$ 与球半径 $R=1$，可得

$$V(\Omega)=2\sqrt{6}\cdot\frac{\pi}{3}\left(2-3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{27}\right)=\frac{56\sqrt{6}}{81}\pi. \tag{3.3}$$

2. (20-21 期中 $T_1(4)$) 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在原点的 4 阶 Taylor 展开式.

解 整体代换 $u=x+y$，因此将单变量函数 e^u 展开至 4 阶即可：

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{4}\frac{(x+y)^n}{n!}+R_4, \tag{3.4}$$

其中 R_4 为高阶余项.

3. (20-21 期中 T_3) 计算积分

$$I=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{3.5}$$

其中 $V=\{(x,y,z)|x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1\}$.

解 联想到球的轮换对称性，作线性变换 $x=au$, $y=bv$, $z=cw$，因此

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= abc(a^2+b^2+c^2)\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{4\pi}{3}abc(a^2+b^2+c^2)\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. (20-21 期中 T_6)

(a). 求椭球 $x^2/9+y^2/16+z^2/25=1$ 在点 $M_0(\sqrt{3},4/\sqrt{3},5/\sqrt{3})$ 的切平面 Π.

(b). 设 V 是切平面 Π 与三个坐标平面围成的区域，求积分

$$I=\iiint_V x\Big(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{3.7}$$

解 (a). $\Pi: x/3+y/4+z/5=\sqrt{3}$.

(b). 可考虑局域等值面 $y/4+z/5=t$ $(0\leqslant t\leqslant \sqrt{3}-x/3)$，其在 yOz 平面内与坐标轴围成的面积为

$$A(t)=\frac{1}{2}\cdot 4t\cdot 5t=10t^2 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}A(t)=20t\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.8}$$

因此

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{3\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}x \iint_{\substack{y/4+z/5\leqslant\sqrt{3}-x/3\\ y,z\geqslant 0}} \Big(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=\int_0^{3\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}-x/3}\Big(\sqrt{3}-t\Big)\cdot 20t\,\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{u=\sqrt{3}-x/3} 180\int_0^{\sqrt{3}}\Big(\sqrt{3}-u\Big)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}u^2-\frac{u^3}{3}\Big)\,\mathrm{d}u\\ &=180\int_0^{\sqrt{3}}\Big(\frac{3}{2}u^2-\frac{5\sqrt{3}}{6}u^3+\frac{u^4}{3}\Big)\,\mathrm{d}u=\frac{81\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

5. (21-22 期中 $T_1(1)$) 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的 4 阶 Taylor 展开式.

解 教材题 9.5.4(2).

6. (21-22 期中 T_3) 求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 6\}$ 上的最大值与最小值.

解 教材题 9.5.11(4).

7. (21-22 期中 T_5)

(a). 计算 $\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$ 及 $y>0$ 围成的闭区域.

(b). 计算 $\iiint_V |z|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 V 是曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ 所围成的闭区域 $a>0$.

解 (a). 注意到 x 随 t 单调增且 y 为 t 的函数，因此实际上可用 x 作为曲线 $y=y(t)$ 的变量，即写成 $y=y(x)$.

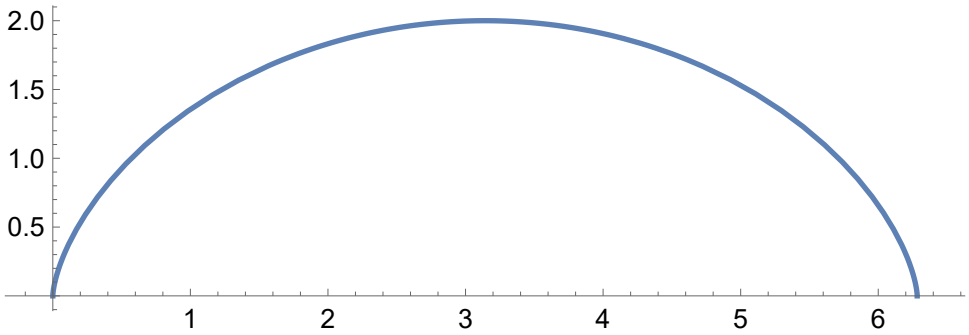


图 1: $a=1$ 时的平摆线图像

因此积分可写成

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \int_0^{y(x)} v^2 \,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} y^3(x(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^4}{12}\int_0^{2\pi}\Big(9+16\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}+\frac{1+\cos 4t}{2}-24\cos t+6\cos 2t \\
&\quad -8\cdot\frac{\cos t+\cos 3t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^4}{24}\int_0^{2\pi}(35-64\cos t+24\cos 2t-8\cos 3t+\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{35\pi}{12}a^4. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

注 如果学了 Γ 函数和 B 函数，这个积分是非常 trivial 的，将其改写成 $(\sin u)^8$ 的积分，得到结果为 $\mathrm{B}(1/2,9/2)/2 = 105\pi/768$.

(b). 注意到出现了 $x^2+y^2\pm z^2$ 的因子，直接考虑球坐标换元，可得曲面方程 $\Sigma: r^2 = -a^2\cos 2\theta > 0$，这要求 $\pi\leqslant\theta\leqslant 3\pi/4$. 积分的旋转对称性给出

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\pi\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{3}a^3\int_{\pi/4}^{\pi/2}(-\cos 2\theta)^{3/2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\cos 2\theta\Big) = \frac{4\pi}{15}a^3. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

8. (21-22 期中 T_7) 证明：积分方程

$$f(x,y) = 1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\,\mathrm{d}v \qquad (3.12)$$

在 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上至多有一个连续解.

解 由于题干不要求证明解的存在性，这里仅需要证明其唯一性. 将研究区域扩展至 D': $|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1$. 对于在 D' 内满足此积分方程的解 f，其在 D 的边界两侧满足

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,0^+)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,0^-)} f(x,y) = 1, \\
\lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0^-,y_0)} f(x,y) = 1, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

其中 $x_0, y_0 \geqslant 0$，因此 f 在 D' 内也是连续解. 假定方程有两个连续解 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$，首先有 $f_i(0,0) = f_i(0,0) = 1$ $(i = 1,2)$. 记 $f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$，则 $f(0,0) = 0$，且 f 至少一阶可微：

$$f_x = \int_0^y [f_1(x,v) - f_2(x,v)]\,\mathrm{d}v\,, \quad f_y = \int_0^x [f_1(u,y) - f_2(u,y)]\,\mathrm{d}u\,, \tag{3.14}$$

并且 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，进而高阶偏导 $\partial^n f/\partial x^n$, $\partial^n f/\partial y^n$ 的存在性均可由其低一阶偏导的存在性导出，即

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} = \int_0^y \frac{\partial^{n-1} f(x,v)}{\partial x^{n-1}}\,\mathrm{d}v\,, \quad \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} = \int_0^x \frac{\partial^{n-1} f(u,y)}{\partial y^{n-1}}\,\mathrm{d}u\,, \tag{3.15}$$

并且 $\partial^n f(0,0)/\partial x^n = \partial^n f(0,0)/\partial y^n = 0$. 对于混合偏导，由于 $f_{xy} = f$ 存在，结合 f 在原点高阶偏导为零的性质，可得

$$\frac{\partial^{m+n} f(0,0)}{\partial_x^m \partial_y^n} = f(0,0)\delta_{mn} = 0. \tag{3.16}$$

这也就是说，$f(x,y)$ 在 D' 内原点附近的任意 $2n$ $(n \geqslant 1)$ 阶 Taylor 展开式 $f_n(x,y) = 0$，因此 $f(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = 0$，即 $f_1(x,y) = f_2(x,y)$，两个连续解完全相同.

注 实际上这一解是存在的. 证明所有高阶偏导存在性后，可证明仅有同阶混合偏导 $\partial^2 f(0,0)/\partial x\partial y = f(0,0) = 1$ 非零，其级数表示为

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{(n!)^2} = I_0(2\sqrt{xy}), \tag{3.17}$$

其中 $I_0(x)$ 为第一类修正 Bessel 函数.

9. (22-23 期中 T_3)

   (a). 计算二重积分 $\iint_D \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$.

   (b). 计算三重积分 $\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中积分区域 V 由 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

   解 (a). 考虑等值面 $D(r): x^2+y^2 \leqslant r^2, y \geqslant 0$，其面积为 $\pi r^2/2$，因此

   $$\text{原式} = \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2} \cdot \pi r\,\mathrm{d}r = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right). \tag{3.18}$$

   (b). 注意到积分区域关于 x, y 对称，但积分函数前两项分别关于 x, y 为奇函数，因此前两项积分值为 0. 由于积分区域出现了 $x^2+y^2\pm z^2$ 的系数，考虑球坐标变换，此时积分区域化为 $\Omega: 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4, r \leqslant 1$ 那么

   $$\text{原式} = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}. \tag{3.19}$$

10. (23-24 期中 $T_1(6)$) 计算 $\iint_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中区域 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$.

解 注意到 D 关于 y 对称，而 $xy/(1+x^2+y^2)$ 关于 y 为奇函数，故该项积分值为零. 剩余积分仍考虑半球面的等值面，因此

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \cdot \mathrm{d}\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \ln 2. \tag{3.20}$$

11. (23-24 期中 T_7) 设 $f(x,y)$ 在 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上有连续的二阶偏导数，并满足 $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ 以及 $(f''_{xx})^2 + 2(f''_{xy})^2 + (f''_{yy})^2 \leqslant 1$，求证：

$$\left| \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{3.21}$$

解 由题意，$f(x,y)$ 的二阶 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}[x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xy f_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y)] \\ &= \frac{1}{2}(x^2, \sqrt{2}xy, y^2) \cdot (f_{xx}, \sqrt{2} f_{xy}, f_{yy})\Big|_{(\theta x, \theta y)}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 $0 < \theta(x,y) < 1$，最后一行将其视为向量点乘，或者直接采用 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \cdot \sqrt{f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}, \tag{3.23}$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| &\leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{3.24}$$