数学分析 B2 第四次习题课

邓嘉驹

更新：June 29, 2026

目录

1 知识回顾 **2**

1.1 空间解析几何 2

1.2 多变量函数的微分学 5

2 作业选讲 **10**

3 真题集萃 **13**

4 教材习题 **18**

1 知识回顾

1.1 空间解析几何

这一章就考试而言并不是重点，但关键在于通过对高中向量知识的补充深入奠定后续曲面积分章节的学习，是承前启后的一章.

1. 向量的基本运算

1. 点乘定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \tag{1.1}$$

叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 产生一个由右手法则确定方向、大小为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{1.2}$$

的向量. 其中值得强调的是叉乘的反对称性：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

2. 在平面直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

2. 平面方程的构建

常见的构建方式有三种：

1. 截距式. 简单易懂，无需额外说明.
2. 构建平面法向量 $\boldsymbol{n}$. 这是最常遇到的情况，后续利用点法式可以给出平面方程. $\boldsymbol{n}$ 的获得最常见的思路是想方设法找到该平面上的两个向量，利用叉乘构建.
3. 绕过定直线的平面. 若该直线给的是交面式

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2. \tag{1.4}$$

这是最理想的情况. 由于直线上的点分别满足平面方程所要求的线性关系，因此这样的点也必然满足两个线性关系的线性叠加，因此绕该直线的平面可设为

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0, \tag{1.5}$$

其中 λ 可取到 ∞. 若该直线给的是点向式，则可利用“化归”的思想，利用参数式构造两个平面方程即可.

3. 直线方程的构建

空间直线方程的构建就比较简单直白了，特征量就是方向向量，比较常见的是找到直线某一法平面内两个向量，利用叉乘构建. 当然，对于存在绕定直线的平面时，有时也会使用表达更简便的交面式.

4. 空间中的位置关系

1. 对于平面，其位置关系无非相交（正交为特殊情形）、平行、重合，最后一种过于 trivial 不予讨论. 平行对应于 $\boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2$，不平行不重合即相交，正交对应于 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$。
   特别地，对于处于角平分线上的平面，可将法向量单位化为 $\boldsymbol{n}_1',\boldsymbol{n}_2'$，则该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1'\pm\boldsymbol{n}_2'$，直线类似.
2. 对于直线，位置关系稍显复杂，有相交、平行、重合、异面. 平行对应于 $\boldsymbol{\tau}_1//\boldsymbol{\tau}_2$，后三者的区别仅在于方程是否有唯一解[1].
3. 对于直线与平面，无非相交、平行、包含三种关系. 平行对应于 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$；包含对应于在平行的基础上任取直线上一点，验证其在平面上；除此之外为相交，特别地，正交满足 $\boldsymbol{n}//\boldsymbol{\tau}$.

5. 空间中的距离计算

距离公式本质上来源于 $d=\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}\right|/|\boldsymbol{n}|$ 和 $d=\left|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{\tau}\right|/|\boldsymbol{\tau}|$，两者分别是对于平面和直线而言的.

1. 两点间的距离公式：trivial.
2. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离：取平面上任一点 $P(x,y,z)$，利用第一个公式可计算得
$$d=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.6}$$
3. 点 $P_0(x_0',y_0',z_0')$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离：取直线上任一点 $P(x,y,z)$，利用第二个公式可计算得
$$d=\frac{|(x-x_0',y-y_0',z-z_0')|\times(l,m,n)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{|(x_0-x_0',y_0-y_0',z_0-z_0')\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{1.7}$$
4. 两平行平面 $\pi_i:Ax+By+Cz+D_i=0\,(i=1,2)$ 的距离公式：可取 π_1 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则化为点到平面的距离，即
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.8}$$

[1]的确有利用混合积判断的方法，单个人感觉不考虑后续异面直线最短距离计算的话，混合积的方法不如线性方程组的方法来得直接，况且求解线性方程组困难的题计算行列式通常也相当费功夫

5. 两平行直线 $l_i: \dfrac{x-x_i}{l}=\dfrac{y-y_i}{m}=\dfrac{z-z_i}{n}$ 间的距离：可取 l_1 上一点 $P_1(x_1,y_1,z_2)$，则化为点到直线的距离，即

$$d=\frac{|(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{1.9}$$

6. 异面直线间的最短距离：两直线最短距离的方向必然与两者均垂直，首先利用方向向量的叉乘构造这一方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2$. 再于两直线上各取一点，通常直接取点向式中给出的点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，利用第一个公式可计算得

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)\cdot(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)|}{|(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)|}. \tag{1.10}$$

6. 常见二次曲面的识别

识别的方式通常为某一坐标取定值（相当于用平行于坐标平面的平面去截取曲面），判断各截面交线的形状.

1. 柱面：在应试中出现基本上是母线平行于坐标轴的情形，trivial.
2. 锥面：在应试中基本以 $z^2=x^2+y^2$ 或 $z=(\pm)\sqrt{x^2+y^2}$ 的形式出现，trivial.
3. 旋转曲面：某两个分量仅有二次项，且二次项系数相等，具体原因见旋转曲面的构建小小节.
4. 椭球面：$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.
5. 双曲面：$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=\pm1$，其中单叶和双叶分别对应于 $+1$ 和 -1. 一个比较简单的区分方法是，分别取 x,y,z 为零，单叶双曲面始终与坐标平面有交线，而双叶双曲面与其一坐标平面不相交（实际上对应这里的负项 $-z^2/c^2$）.
6. 椭圆抛物面：$z=x^2/a^2+y^2/b^2$.
7. 双曲抛物面：$z=x^2/a^2-y^2/b^2$.

7. 旋转曲面的构建[2]

核心思路是，取转动轴的某一法平面，则对于旋转曲面上任一点 $P(x,y,z)$，其应当满足两个条件：(1) 点 P 在该平面上；(2) 记该平面与用于旋转的曲面交于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 P 与 P_0 到旋转轴的距离相等. 原本空间坐标有 3 个自由度，引入法平面沿旋转轴滑移的自由度，再消去两个约束条件减少的自由度，最终根据这两个条件列出的方程组应当有 2 个自由度，符合空间曲面的自由度要求，条件完备.

[2]柱面的构建后面有一道专门的习题讲解，因其本身不是特别困难，就放弃了新开一个小小节讲解的想法

1.2 多变量函数的微分学

尽管整个数学分析 B2 中更强调计算，这一章仍有不少繁杂困难的证明（相信大家在学单变量微分学的时候就感受到了），尤其是在期中考试里这部分占比会很大. 当然，抛开应试，本章本身就是相当重要的，含参变量积分的计算就是依托于此的，空间曲线切向量与空间曲面法向量的计算以及矢量场的微分更是曲面积分这一章的核心基础. 这对于对于物理学院的学生更是如此，掌握好偏微分能在理论力学课程中轻松不少，熟悉场论的梯度、散度、旋度能让你在电动力学课程中游刃有余. 总之这一章的实用性是非常强的，希望同学们能在这里多下点功夫，对相关定理与常用结论（不过不用太纠结于证明）要有清晰的印象.

1. 函数的极限与连续性

定义 1.1 (二元函数的极限) 对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta(\varepsilon, M_0) > 0$，其中点 $M_0(x_0, y_0)$，使得当

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{或} \quad 0 < |x-x_0| < \delta,\ 0 < |y-y_0| < \delta \tag{1.11}$$

时，$0 < |f(x,y) - a| < \varepsilon$ 恒成立，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$.

当然，一般要用 ε-δ 语言证明极限存在时，通常用后者，因为接近线性的运算通常要来得更简单. 并且要注意区分极限和累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，这在之后的重积分和累次积分中同样会遇到类似的问题，容易想到的例子如 x/y 在原点的极限.

定义 1.2 (二元函数的连续性) 上述定义中，若 $a = f(x_0, y_0)$，则 $f(x,y)$ 在点 M_0 连续. 若对 D 上任一点满足 $\delta = \delta(\varepsilon)$，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

2. 偏导数与可微性

定义 1.3 (二元函数的偏导数)

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \left.\frac{\mathrm{d} f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \tag{1.12}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y)}{y - y_0} = \left.\frac{\mathrm{d} f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}. \tag{1.13}$$

类似地，可定义高阶偏导数.

若 $f(x,y) \in C^n(D)$，则 $f(x,y)$ 在 D 中 n 阶偏导可交换.

定义 1.4 (二元函数的可微性) 记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则

$$f(x,y)\text{在}M_0(x_0,y_0)\text{可微} \iff \lim_{\rho\to 0^+} \left.\frac{\Delta f - f_x \Delta x - f_y \Delta y}{\rho}\right|_{M_0} = 0. \tag{1.14}$$

3. 方向导数与梯度

定义 1.5 (二元函数的方向导数) 记 $\boldsymbol{l}=l(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}, \tag{1.15}$$

几何上，方向导数即 $f(x,y)$ 在 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位增长率. 换言之，沿 $\boldsymbol{l}$ 方向增量 Δf 有多大，取决于方向导数与增量 t 的乘积.

注 教材更新后，方向导数的极限值由“射线型”的 $t\to 0^+$ 更改为“直线型”的 $t\to 0$，要注意这一变化. 在去年期中考试课题组给的阅卷标准答案中，采用的方向导数定义也是后者，指向性明确.

定义 1.6 (二元函数的梯度) 若函数 f 可微，则

$$\nabla f=\operatorname{grad} f=f_x\hat{\boldsymbol{x}}+f_y\hat{\boldsymbol{y}}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\nabla f\cdot\frac{\boldsymbol{l}}{l}. \tag{1.16}$$

梯度方向即 $f(x,y)$ 增长率（绝对值）最高的方向，因为 $|\partial f/\partial \boldsymbol{l}|\leqslant|\nabla f|$ 恒成立. 另外，$\nabla\cdot$ 表示对向量场的散度，$\nabla\times$ 表示对向量场的旋度，当然这是后话了. Nabla 算子对标量场的作用满足 Leibniz 法则：

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f. \tag{1.17}$$

4. 梯度算符在不同（空间）坐标系下的表示

首先应当明确的一点是，无论是 Nabla 还是 Laplacian，其本身都是不依赖于坐标系的存在，以下公式只是在具体坐标系下对该算符进行展开表示. 这是容易理解的，因为算符作用的对象是不依赖于坐标系的标量场、向量场或张量场，作用的结果也是不依赖于坐标系的标量场、向量场或张量场，因此算符本身也是不依赖于坐标系的.

1. 直角坐标系：结合 Einstein 求和约定，Nabla 可写为

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\hat{\boldsymbol{x}}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\hat{\boldsymbol{x}}_i\partial_i, \tag{1.18}$$

相应地，拉普拉斯算符 (Laplacian) 为

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=(\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\hat{\mathbf{x}}_j)(\partial_i\partial_j)=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2. \tag{1.19}$$

2. 柱坐标系：

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{\rho}}\partial_\rho+\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\rho}\partial_\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\partial_z. \tag{1.20}$$

注 在一般的正交曲线坐标系中，对某坐标的导数作用在坐标基矢上的结果可能是非零的. 以柱坐标基矢为例，对其直角坐标表示进行微分：

$$\partial_\varphi\hat{\rho}=\partial_\varphi(\cos\varphi,\sin\varphi,0)=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)=\hat{\varphi}, \tag{1.21}$$

$$\partial_\varphi\hat{\varphi}=\partial_\varphi(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)=-(\cos\varphi,\sin\varphi,0)=\hat{\rho}. \tag{1.22}$$

因此这里给出的算子表示中，坐标基矢与求导顺序是绝对不可交换的. 当然，这在物理上采用运动学描述（或者数学上的几何观点）是更形象直观、更容易理解的，也避免了公式推导和记忆.

同样给出 Laplacian：

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f. \tag{1.23}$$

3. 球坐标系：

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\partial_r + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r\sin\theta}\partial_\varphi, \tag{1.24}$$

其 Laplacian 为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 f. \tag{1.25}$$

5. 向量场的微分

设 $\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$，则

$$\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^n} = (A_x^{(n)}(t), A_y^{(n)}(t), A_z^{(n)}(t)), \tag{1.26}$$

当然，这里 t 可以取坐标 x, y, z. 向量值函数的运算仍满足 Leibniz 法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{A}] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.29}$$

特别地，若 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{r}(t)$，则该向量场即一空间曲线，几何上看，参数 t 相当于质点从曲线上某一点出发、沿该曲线向前走过的路程.

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(u, v)$，仿上可定义偏导数，类似地 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 表示空间曲面.

6. Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式

1. 考虑从 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 到 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 的变换，有

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}\mathrm{d}y_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}y_1 & \cdots & \partial_{x_n}y_1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{x_n}y_1 & \cdots & \partial_{x_n}y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

其中变换矩阵定义为 Jacobi 矩阵，记为 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$，Jacobi 行列式即 $\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$.

2. 常在重积分中利用二元和三元的 Jacobi 行列式，即

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.31}$$

同学们可以试试将柱坐标和球坐标三个坐标分别代入 (u,v,w)，可得到柱坐标和球坐标下的体积元.

3. Jacobi 行列式的链式法则[3]：

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{1.32}$$

7. 隐函数偏导数的计算

1. 对于满足单一约束条件 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的变量组来说，若偏导数存在，则

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial_i F}{\partial_i F}, \quad i \neq j. \tag{1.33}$$

2. 对于多约束的情况，在应试中至多出现双重约束的情形：$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$ 若计算 u_x, u_v，则选取 u 与其他任一变量作为因变量（这里选择 v），对另外两个（自）变量求偏导即可：

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

利用此方程组分别解出 u_x, u_v 即可（这里不建议记书上的公式）.

注 需要注意的是，若计算 $\mathrm{d}u$ 或 u_x, u_v 都需要计算的话，应将 $\mathrm{d}u$ 视为一个整体，对方程组取微分即可：

$$\begin{cases} F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v = 0, \\ G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_u\,\mathrm{d}u + G_v\,\mathrm{d}v = 0, \end{cases} \tag{1.35}$$

整体地计算出 $\mathrm{d}u$ 而不必拆成偏导分别计算两次.

3. 两个常用的偏微分公式（利用隐函数求导法则容易证明）：

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.36}$$

8. 空间曲线的切向量与弧长

对于参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，其切向量为

$$\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \tag{1.37}$$

[3]要证明该结论，考虑两次坐标变换即可

弧长微元为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|\mathrm{d}t\,. \tag{1.38}$$

对于交面式表达的曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$ 视参量 t 为坐标 x, y, z 之一即可. 以坐标 x 为例，切向量为 $(1, y_x, z_x)$，弧长微元为 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y_x^2 + z_x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 y_x, z_x 的计算方法已在上一小小节进行了充分讨论.

9. 空间曲面切平面的构建

对于参数曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$，考虑其对两变量的偏导数 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$. 经上一小小节的讨论，对于曲面上任一给定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，均存在一条在该曲面上且过该点的曲线

$$\boldsymbol{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \tag{1.39}$$

这里 v_0 为一常数，满足 $x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0),\ z_0 = z(u_0, v_0)$. 因此 $\boldsymbol{r}_u\big|_{M_0}$ 可视为该曲线在 (u_0, v_0) 处即点 M_0 处的切线. 类似地，$\boldsymbol{r}_v\big|_{M_0}$ 为另一切线. 由于两切线均在切平面上，因此切平面的法向量为 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$，切点即点 M_0.

对于一般式表达的曲面 $F(x,y,z) = 0$，其法向量为 ∇F. 特别地，对于形如 $z = f(x,y)$ 的显式曲面，可取参数为 x, y，那么 $\boldsymbol{r} = (x, y, f(x,y))$，或者直接通过梯度计算.

2 作业选讲

1. [9.2.2 (5)] 求函数 $u=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$ 对 x,y 的偏微商.

   解 注意到

   $$z=\arctan\frac{x+y}{x-y}=\arctan\frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}=\arctan\frac{y}{x}+\frac{\pi}{4},\tag{2.1}$$

   因此 $z_x=-y/(x^2+y^2)$, $z_y=x/(x^2+y^2)$.

2. (9.2.15) 根据可微的定义证明，函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

   解 注意到 $f(0,0)=0$，且 $f_x(0,0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0=f_y(0,0)$，故

   $$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\sqrt{|\cos\theta(\rho)\sin\theta(\rho)|},\tag{2.2}$$

   可见当 $f(x,y)$ 沿任一过极坐标原点的曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 趋于原点时，上述极限不存在，故 $f(x,y)$ 在原点不可微.

3. (9.2.16) 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在此点不可微.

   解 先证明连续性：

   $$\lim_{\rho\to0^+}f(x,y)\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos^2\theta(\rho)\sin\theta(\rho)=0,\tag{2.3}$$

   其中已利用夹逼准则 $0<|f(x,y)|\leqslant\rho$. 再证明不可微：由定义容易证明[4] $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，因此

   $$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\cos^2\theta(\rho)\sin\theta(\rho).\tag{2.4}$$

   例如当 $f(x,y)$ 从不同方向沿射线趋于原点时，上述极限值不同，故该极限不存在，从而 $f(x,y)$ 在原点不可微.

   注 这两题是为了介绍分式型二元函数连续与可微性判断的通用解法[5]，无论是有理分式还是无理分式. 因为二元函数在原点的极限实际上是考虑函数值沿无穷多过原点路径的取值变化，从而在极坐标系下考虑是万分简单的. 对于某一确定的路径 $\rho=\rho(\theta)$，二元极限退化成一元极限 $\rho\to0^+$，θ 随 ρ 的变化则由轨迹方程给出. 当然，对于含 e、ln 或者 sin 项的表达式，这一方法对部分题也是适用的.

4. (9.2.11) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明当 $r\neq0$ 时有

   (a). $\dfrac{\partial^2r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

[4] 助教偷懒，考试不能这么写，毕竟算分的

[5] 甚至可以目测（逃）

(b). $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}$.

(c). $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{1}{r^2}=0$.

解 直角坐标系下计算略，以下另外给两种解法：

(a). Method 1: 采用球坐标下的 Laplacian（背公式法），即

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta f)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 f. \tag{2.5}$$

由于 $f(\boldsymbol{r})=f(r)$，即函数只与位矢 $\boldsymbol{r}$ 的长度 r 有关，故仅取第一项，容易证明.

(b). Method 2: 采用不依赖于坐标系的 Leibniz 公式方法（不背公式法，推荐）. 容易看出 $\nabla r=\hat{\boldsymbol{r}}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$，因此

$$\nabla^2 r=\nabla\cdot\nabla r=\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla(\frac{1}{r})=\frac{3-1}{r}=\frac{2}{r}. \tag{2.6}$$

类似地，另外两问也容易证明：

$$\nabla^2\ln r=\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}=\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}=\frac{3-2}{r^2}=\frac{1}{r^2}, \tag{2.7}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0. \tag{2.8}$$

5. (9.2.32) 设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 求常数 a.（其中二阶偏导数均连续）

解 对于有显示解的变量代换方程组，千万不要上来就剥蒜！这里还是给两种不同解法，适合不同宝宝体质（雾）.

(a). Method 1: 简单易懂的方法——反解方程组得到 x,y 关于 u,v 的表达式，这样只用算一次二阶偏导（原本要算三次），即 $\begin{cases}x=(au+2v)/(a+2),\\ y=(v-u)/(a+2),\end{cases}$ 从而

$$z_{uv}=\partial_v\left(\frac{az_x-z_y}{a+2}\right)=\frac{2az_{xx}+(a-2)z_{xy}-z_{yy}}{(a+2)^2}=0. \tag{2.9}$$

对比 z_{xx} 和 z_{yy} 的系数比，解得 $a=3$.

(b). Method 2: PDE 降维打击（视情况可能习题课讲点），这是二阶线性齐次 PDE，因此解以下方程：

$$6(\mathrm{d}y)^2-(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y)-(\mathrm{d}x)^2=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\text{ or }-\frac{1}{3}, \tag{2.10}$$

即 $x-2y=C_1$ 和 $x+3y=C_2$. 因此对于此双曲型方程，作变量代换 $\xi=x-2y$, $\eta=x+3y$，必然可将其简化为 $z_{\xi\eta}=0$. 对比系数可知，$a=3$.

注 为简单起见，考虑不含一次项和零次项的二阶线性齐次偏微分方程：

$$a(x,y)z_{xx}+2b(x,y)z_{xy}+c(x,y)z_yy=0, \tag{2.11}$$

其特征方程为：

$$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y) + c(\mathrm{d}x)^2 = 0, \tag{2.12}$$

注意交叉项符号反向. 其判别式 $\Delta = b^2 - ac$，该方程的解记为 $\begin{cases} f(x,y) = C_1, \\ g(x,y) = C_2, \end{cases}$ 则作相应的变量代换 $\begin{cases} \xi = f(x,y), \\ \eta = g(x,y). \end{cases}$ 以下分三种情况：

(a). $\Delta > 0$，该方程为双曲型，方程可化为 $z_{\xi\eta} = 0$.

(b). $\Delta = 0$，该方程为抛物型，此时保留 ξ 的变换，η 与 ξ 线性无关即可.

(c). $\Delta < 0$，该方程为椭圆型，此时 $f(x,y), g(x,y)$ 为共轭复变函数，考虑实值变量代换

$$\begin{cases} \xi(x,y) = \operatorname{Re} f = (f+g)/2, \\ \eta(x,y) = \operatorname{Im} f = (f-g)/2\mathrm{i}. \end{cases} \tag{2.13}$$

3 真题集萃

1. [23-24 期中 T_1 (2)] 求过直线 $l=\begin{cases}2x+y-z-2=0,\\3x-2y-2z+1=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi: 3x+2y+3z-9=0$ 垂直的平面方程.

   解 对于此交面式直线方程，参见1.1小小节给出的绕定直线的平面系方程：

   $$\pi': (2+3\lambda)x+(1-2\lambda)-(1+2\lambda)z+(\lambda-2)=0, \tag{3.1}$$

   因此 π' 与 π 垂直给出

   $$0=(2+3\lambda,1-2\lambda,-1-2\lambda)\cdot(3,2,3)=5-\lambda \quad\Longrightarrow\quad \lambda=5, \tag{3.2}$$

   因此该平面方程为

   $$\pi': 17x-9y-11z+3=0. \tag{3.3}$$

2. (22-23 期中 T_7) 设 $f(x,y)$ 为开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续可偏导函数，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的夹角为 α 的单位向量. 证明：

   $$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\sin^2\alpha\leqslant 2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)^2\right]. \tag{3.4}$$

   解 由题意，

   $$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{u},\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{v}. \tag{3.5}$$

   记 ∇f 与 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的夹角分别为 θ_1,θ_2，则 $|\theta_1-\theta_2|=\alpha$. 注意到 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为单位向量，因此

   $$\begin{aligned}2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)^2\right]&=2|\nabla f|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)=2|\nabla f|^2\left(1+\frac{\cos 2\theta_1+\cos 2\theta_2}{2}\right)\\&=2|\nabla f|^2[1+\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)]\geqslant 2|\nabla f|^2(1-\cos\alpha)\\&\geqslant(1+\cos\alpha)\cdot|\nabla f|^2(1-\cos\alpha)=|\nabla f|^2\sin^2\alpha.\end{aligned} \tag{3.6}$$

3. (22-23 期中 T_8) 二元函数 $f(x,y)$ 被称为凸函数是指：对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $t\in[0,1]$，都有如下不等式：

   $$f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2). \tag{3.7}$$

   假设函数 f 是可微的，求证：f 是凸函数当且仅当对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，有

   $$(x_1-x_2)f'_x(x_1,y_1)+(y_1-y_2)f'_y(x_1,y_1)\geqslant f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2). \tag{3.8}$$

   解 (a). 必要性：记 $\begin{cases}x=tx_1+(1-t)x_2,\\y=ty_1+(1-t)y_2,\end{cases}$ 则条件可化为

   $$f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\geqslant\frac{f(x,y)-f(x_2,y)}{t}+\frac{f(x_2,y)-f(x_2,y_2)}{t}, \tag{3.9}$$

其中已利用 $t\in[0,1]$ 的条件. 再记 $\Delta x=t(x_1-x_2)$, $\Delta y=t(y_1-y_2)$,则 $\begin{cases}x=x_2+\Delta x,\\ y=y_2+\Delta y.\end{cases}$ 由于 x_1,x_2 和 y_1,y_2 大小关系不定,$t\to0^+$ 时可对应 $\Delta x\to0^+$ or 0^-,合并写成 $\Delta x\to0$; Δy 类似. 结合二元函数的微分中值定理，对不等式两侧分别取 $t\to0^+$ 的极限可得

$$\begin{aligned}&f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\\ \geqslant&(x_1-x_2)\lim_{t\to0^+}f_x(x_2+\theta_1\Delta x,y(t))+(y_1-y_2)\lim_{\Delta y\to0}f_y(x_2,y_2+\theta_2\Delta y)\\ =&(x_1-x_2)f_x(x_2,y_2)+(y_1-y_2)f_y(x_2,y_2).\end{aligned}\tag{3.10}$$

由于点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 平权，故交换下标 1 和 2 可得到待证表达式.

(b). 充分性：改用 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P(x,y)$ 表示 $P_2(x_2,y_2)$：

$$\begin{cases}x_2=(x-tx_1)/(1-t),\\ y_2=(y-ty_1)/(1-t),\end{cases}\tag{3.11}$$

构造函数

$$g(t)=f(x,y)-tf(x_1,y_1)-(1-t)f\left(\frac{x-tx_1}{1-t},\frac{y-ty_2}{1-t}\right).\tag{3.12}$$

注意此时认为 (x,y) 是独立于 t 的参数，而原本的 (x_2,y_2) 才是 t 的函数，从而其一阶导为

$$\begin{aligned}g'(t)=&-f(x_1,y_1)+f(x_2(t),y_2(t))\\ &-\left[\frac{x-x_1}{1-t}f_1(x_2(t),y_2(t))+\frac{y-y_1}{1-t}f_2(x_2(t),y_2(t))\right]\\ =&f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)-[(x_2-x_1)f_x(x_2,y_2)+(y_2-y_1)f_y(x_2,y_2)]\geqslant0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中最后一个不等式用到了题设条件，故 $g(t)$ 在 $t\in[0,1]$ 上单调递增，$g(t)\geqslant g(0)=0$，即

$$f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2).\tag{3.14}$$

4. [22-23 期中 T_2 (2)] 求由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 在点 $(0,0,a)$ 附近所确定函数 $z(x,y)$ 的偏导数 $\partial^2z/\partial x\partial y$，其中 a 为给定的正常数.

解 记 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则由隐函数求导法则，对于由 $F=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$，

$$z_x\Big|_{(0,0,a)}=-\frac{F_x}{F_z}\Big|_{(0,0,a)}=\frac{yz}{z^2-xy}\Big|_{(0,0,a)}=0,\tag{3.15}$$

$$z_{xy}\Big|_{(0,0,a)}=\partial_yz_x\Big|_{(0,0,a)}=\frac{z^3-y(z^2+xy)z_y}{(z^2-xy)^2}\Big|_{(0,0,a)}=\frac{1}{a},\tag{3.16}$$

其中 $z_y(0,0)=z_x(0,0)=0$ 利用了原方程以及研究点 $(0,0,a)$ 中 x,y 坐标的交换对称性.

5. (21-22 期中 T_4) 给定正整数 n，设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 讨论 n 为何值时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处：(1) 连续；(2) 可微.

解 将 $f(x,y)$ 在极坐标下表示：

$$g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^n\ln\rho^2\cdot(\cos\theta+\sin\theta)^n. \tag{3.17}$$

(a). $f(x,y)$ 在原点连续等价于

$$0=f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}=\lim_{\rho\to0^+}g(\rho,\theta(\rho)). \tag{3.18}$$

注意到

$$\lim_{\rho\to0^+}\rho^n\ln\rho^2=\begin{cases}0, & n>0,\\ \text{不存在}, & n\geqslant0.\end{cases} \tag{3.19}$$

另一方面，n 有限使得 $|(\cos\theta+\sin\theta)^n|\leqslant2^n$，故 $f(x,y)$ 在原点连续要求 $n>0$.

(b). 注意到 $g(\rho,\theta)\propto\rho$ 且 $g(0,\theta)=0$，故按定义必然可算出[6] $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，从而 $f(x,y)$ 在原点可微等价于

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{g(\rho,\theta)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{n-1}\ln\rho^2\cdot[\cos\theta(\rho)+\sin\theta(\rho)]^n, \tag{3.20}$$

仿上分析可知，此时要求 $n-1>0$，即 $n>1$.

6. (20-21 期中 T_2) 设 $f(x,y)$ 有 2 阶连续偏导数，$\partial f/\partial y\neq0$，求 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 的二阶偏导数（用 f 的各阶导数表示）.

解 $y_x=-f_y(x,y(x))/f_x(x,y(x))$，进而

$$\begin{aligned}y_{xx}&=-\frac{1}{f_y^2}[f_y(f_{xx}+f_{xy}y_x)-f_x(f_{yx}+f_{yy}y_x)]\\&=-\frac{1}{f_y^2}[(f_{xx}f_y-f_{xy}f_x)+(f_yf_{xy}-f_xf_{yy})y_x]\\&=-\frac{1}{f_y^3}(f_y^2f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+f_x^2f_{yy})\end{aligned} \tag{3.21}$$

7. (20-21 期中 T_5) 设参数变换 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 有二阶连续的偏导数，并满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.22}$$

证明：对任意二阶连续可微函数 $z=f(x,y)$，有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}\right). \tag{3.23}$$

[6] 考试时最好还是按定义算出来，别省这两行，这里我偷懒了

解 这道题的出题背景是复变函数中可微函数的调和性，给出的微分条件实际上被称为 Cauchy-Riemann 方程，是判定函数可微的充要条件之一. 设

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\partial_u\\ \partial_v\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

代入题设条件，

$$M^TM=\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ -u_y & u_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x & -u_y\\ u_y & u_x\end{pmatrix}=(u_x^2+u_y^2)I, \tag{3.25}$$

其中 I 为单位矩阵，因此

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}=\partial_x^2+\partial_y^2&=\begin{pmatrix}\partial_x & \partial_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\partial_u & \partial_v\end{pmatrix}M^TM\begin{pmatrix}\partial_u\\ \partial_v\end{pmatrix}\\ &=(u_x^2+u_y^2)\Delta_{uv},\end{aligned} \tag{3.26}$$

将其作用在 $z=f(x,y)$ 上，展开写成

$$z_{xx}^2+z_{yy}^2=(u_x^2+u_y^2)(z_{uu}^2+z_{vv}^2). \tag{3.27}$$

8. (18-19 期中 T_1) 设有空间直线 L_1 与 L_2 分别由如下的方程组定义：

$$L_1:\begin{cases}x=y,\\ x+y+z=1,\end{cases}\qquad L_2\begin{cases}2x+y=1,\\ x+z=0.\end{cases} \tag{3.28}$$

求一个平面与它们平行且到它们的距离相等.

解 与两直线均平行的平面，其法向量与两直线均垂直，因此先求出 L_1,L_2 的方向向量

$$\boldsymbol{\tau}_1=(1,-1,0)\times(1,1,1)=(-1,-1,2), \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2=(2,1,0)\times(1,0,1)=(1,-2,-1), \tag{3.30}$$

从而平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2=(5,1,3). \tag{3.31}$$

各取 L_1,L_2 上一点 $P_1(0,0,1)$ 和 $P_2(0,1,0)$，那么法向量为 $\boldsymbol{n}$ 且过 L_1,L_2 的平面方程为

$$\pi_1:5x+y+3z-3=0,\quad \pi_2:5x+y+3z-1=0. \tag{3.32}$$

因此到 L_1,L_2 距离相等的平面即到 π_1,π_2 距离相等的平面，其方程为

$$\pi:5x+y+3z-2=0. \tag{3.33}$$

9. (18-19 期中 T_2) 设有一条曲线由如下方程组定义：

$$\begin{cases} x = yz, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \end{cases} \tag{3.34}$$

请判断这条曲线在不在一个平面上，并给出理由.

解 考虑 $x = 0$ 的点，可解得 $(0, \pm\sqrt{2}, 0), (0, 0, \pm\sqrt{2})$，这些点都在平面 $x = 0$ 上. 若该曲线在某一平面上，要求其余点也均在此平面上，显然这是不可能的，例如点 $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{\sqrt{3} - 1}, \sqrt{\sqrt{3} - 1})$ 就不在该平面上. 因此这条曲线不在一个平面上.

10. (18-19 期中 T_5) 设 $C > 0$ 是一个常数，又设函数 $f(x, y)$ 满足：对于任何平面上的点 (x, y)，存在 $a(x, y), b(x, y)$ 使得对于任何实数 h, k 满足 $|h| + |k| \leqslant 1$，有

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y) - a(x, y)h - b(x, y)k| \leqslant C(|h| + |k|)^{3/2}. \tag{3.35}$$

求证：f 有一致连续的偏导数.

解 记 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$，均值不等式给出，

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y) - a(x, y)h - b(x, y)k| \leqslant C(|h| + |k|)^{3/2} \leqslant C\left(\sqrt{2}\rho\right)^{3/2}, \tag{3.36}$$

由夹逼准则，

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - a(x, y)h - b(x, y)k}{\rho} = 0, \tag{3.37}$$

因此 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，且 $a(x, y) = f_x(x, y)$, $b(x, y) = f_y(x, y)$. 令 $k = 0$，分别对 $(x, y) \to (x + h, y)$ 和 $(x + h, y) \to (x, y)$ 的变化写出不等式：

$$|f(x + h, y) - f(x, y) - f_x(x, y)h| \leqslant C|h|^{3/2}, \tag{3.38}$$

$$|f(x, y) - f(x + h, y) - f_x(x + h, y)(-h)| \leqslant C|-h|^{3/2}, \tag{3.39}$$

由三角不等式，

$$\begin{aligned} &|f_x(x + h, y) - f_x(x, y)| \\ \leqslant &\frac{1}{|h|}(|f(x, y) - f(x + h, y) + f_x(x + h, y)h| + |f(x + h, y) - f(x, y) - f_x(x, y)h|) \\ \leqslant &\frac{C|h|^{3/2} + C|h|^{3/2}}{|h|} = 2C\sqrt{|h|}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

因此对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta(\varepsilon) = (\varepsilon/2C)^2$，当 $|h| < \delta$ 时，满足

$$|f_x(x + h, y) - f_x(x, y)| \leqslant 2C\sqrt{|h|} < \varepsilon. \tag{3.41}$$

故 f_x 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续，f_y 类似可证. 综上，f 有一致连续的偏导数.

4 教材习题

1. (8.2.26) 过直线 $\begin{cases}5x-11z+7=0,\\5y+7z-4=0\end{cases}$ 作两互相垂直的平面，其中一平面过点 $(4,-3,1)$，求此二平面方程.

   解 由于此二平面均过定直线，故两者方程可分别设为

   $$\pi_i: 5x+5\lambda_i y+(7\lambda_i-11)z+(7-4\lambda_i)=0,\quad i=1,2. \tag{4.1}$$

   由于 π_1 过点 $(4,-3,1)$，将其坐标代入解得 $\lambda_1=4/3$，因此

   $$\pi_1: 3x+4y-z+1=0. \tag{4.2}$$

   由于 π_1,π_2 相互垂直，其法向量正交，解得 $\lambda_2=-2$，因此

   $$\pi_2: x-2y-5z+3=0. \tag{4.3}$$

2. (8.2.29) 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标.

   解 注意到平面法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,2,-9)$，因此可设原点关于平面的对称点的坐标为 $(6t,2t,-9t)$. 两者连线中点在平面上，即

   $$6\cdot 3t+2\cdot t-9\cdot\left(-\frac{9}{2}t\right)+121=\frac{121}{2}t+121=0 \quad\Longrightarrow\quad t=-2, \tag{4.4}$$

   因此对称点的坐标为 $(-12,-4,18)$.

3. (8.2.34) 写出垂直于平面 $5x-y+3z-2=0$，且与它的交线在 Oxy 平面上的平面方程.

   解 题干可重新表述为“平面 $\pi_1: 5x-y+3z-2=0$ 与 Oxy 平面的交线为 l，写出绕 l 旋转的平面系中与 π_1 垂直的平面 π_2”. 因此 π_2 的方程可设为 $5x-y+(3+\lambda)z-2=0$. 两平面垂直意味着

   $$0=5^2+(-1)^2+3(3+\lambda)=3\lambda+35 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=-\frac{35}{3}, \tag{4.5}$$

   因此该平面方程为 $15x-3y-26z-6=0$.

4. (Ch 8.7) 求准线为 $\begin{cases}y^2+z^2=1,\\x=1,\end{cases}$ 母线方向为 $(2,1,1)$ 的柱面的一般方程.

   解 任取准线上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则柱面上沿母线方向任一点 P 的坐标为

   $$\begin{cases}x=x_0+2t,\\y=y_0+t,\\z_0=z_0+t,\end{cases} \tag{4.6}$$

   用 P 点坐标表示 P_0 点坐标，代回准线方程得曲面方程：

   $$\begin{cases}(y-t)^2+(z-t)^2=1,\\x-2t=1\end{cases} \xrightarrow{\text{消去}t} \quad (2y-x+1)^2+(2z-x+1)^2=1. \tag{4.7}$$

5. (Ch 8.12) 已知椭球面的三个半长轴长分别为 a,b,c，三条对称轴方程分别为

$$3-x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2},\quad \frac{x}{2}=3-y=\frac{z}{2},\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=3-z, \tag{4.8}$$

求椭球面的一般方程.

解 回忆对称轴与 $Oxyz$ 坐标系的坐标轴重合时的椭球方程是如何构建的：考虑椭球面上相对椭球中心的任一点位矢 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则其方程为

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{x}})^2}{a^2}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{y}})^2}{b^2}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})^2}{c^2}. \tag{4.9}$$

因此对于一般的椭球面方程，先计算出其中心，即三条对称轴的交点，此处为 $(2,2,2)$. 设椭球面上一点坐标为 (x,y,z)，则其相对椭球中心的位矢为 $\boldsymbol{r}=(x-2,y-2,z-2)$；再考虑三条对称轴的单位方向向量，计算 $\boldsymbol{r}$ 在三个方向上的投影即可，容易算出

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_1=\frac{(-1,2,2)}{3},\quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_2=\frac{(2,-1,2)}{3},\quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_3=\frac{(2,2,-1)}{3}, \tag{4.10}$$

因此椭球方程为

$$\begin{aligned}1&=\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}_1)^2}{a^2}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}_2)^2}{b^2}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}_3)^2}{c^2}\\&=\frac{(2y+2z-x-6)^2}{9a^2}+\frac{(2z+2x-y-6)^2}{9b^2}+\frac{(2x+2y-z-6)^2}{9c^2}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

6. (9.1.19) 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续，且关于变量 y 是单调的，证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续.

解 由于 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上对 y 连续，故对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta_1(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$，使得

$$|f(x_0,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.12}$$

由于 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上对 x 连续，故对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta_2(x_0,y_0),\delta_3(x_0,y_0),\delta_4(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$，使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，满足

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.13}$$

$$|f(x,y_0+\delta_1(x_0,y_0))-f(x_0,y_0+\delta_1(x_0,y_0))|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.14}$$

$$|f(x,y_0-\delta_1(x_0,y_0))-f(x_0,y_0-\delta_1(x_0,y_0))|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.15}$$

又因为 $f(x,y)$ 对变量 y 单调，若取 $\delta(x_0,y_0)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\delta_i$，则当 $|y-y_0|<\delta$ 时，满足

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0-\delta)|\leqslant|f(x,y_0+\delta_1)-f(x,y_0-\delta_1)|. \tag{4.16}$$

因此对 $\forall\varepsilon>$，总 $\exists\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\delta_i$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，满足

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\leqslant&|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x,y_0)|\\\leqslant&|f(x,y_0+\delta_1)-f(x,y_0-\delta_1)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\\leqslant&|f(x,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)|+|f(x,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|\\&+|f(x_0,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\<&\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,\end{aligned} \tag{4.18}$$

因此 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

注 经典错误是利用三角不等式

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \tag{4.19}$$

放缩，然后对不等式右侧两项分别利用极限的定义给出 δ 再取两者最大. 这一证明的错误在于完全忽略了 $f(x,y)$ 关于某个变量单调的条件，因而结论不会成立，例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases} \tag{4.20}$$

在 $x=0$ 和 $y=0$ 上分别对 y 和 x 连续，但在原点不连续.

关键问题在于利用 ε-δ 语言描述时，不等式右侧两项分别给出的 δ_1 和 δ_2 应为 $\delta_1(x,y_0)$ 和 $\delta_2(x_0,y_0)$，因此 δ_1 和 δ 的最小非零下确界可能并不存在（一致连续时必然存在）. 在上述例子中，点 $P_0(x_0,y_0)=(0,0)$，因此 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$ 必然成立，这使得 $\delta(\varepsilon,P_0)$ 最小可取到 0. 那么无论 x 取何值，δ_1 和 δ 的最小值均为 0，不存在非零下确界. 有了这样的思考，证明的核心就转移到了能否通过变形使得所有的 δ 归到同一点 (x_0,y_0) 上.

7. [9.2.1 (3)] 设 $f(x,y)=\ln\left[xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}\right]$，求 $f'_x(1,y)$, $f'_y(1,y)$.

解 记 $u=xy^2+yx^2$, $g(u)=\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$，则 $f(x,y)=g(u)$，且

$$g'(u)=\frac{1+u/\sqrt{1+u^2}}{u+\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \tag{4.21}$$

而 $x=1$ 时 $u=y^2+y$，因此

$$f_x(1,y)=\left.g'(u)u_x\right|_{x=1}=\frac{y^2+2y}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}, \tag{4.22}$$

$$f_y(1,y)=\left.g'(u)u_y\right|_{x=1}=\frac{2y+1}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}. \tag{4.23}$$

注 再次强调,剥蒜前观察观察再观察,类似地有 21-22 期中第一题,将 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 展开至 4 阶. 虽然大家这时还没学二元函数的 Taylor 展开，但其实都能做，因为换元 $u=x^2+y^2$ 后，这就是单变量函数的 Taylor 展开：

$$f(x,y)=g(u(x,y))=1-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2), \tag{4.24}$$

而 $u^2=(x^2+y^2)^2$ 已包含全部 4 阶项信息了，再高阶 u^3 就到了 6 阶，但我当时头铁算到 4 阶混合偏导、求出结果后才反应过来[7].

8. (9.3.9) 设 $y=f(x+t)$，而 t 是由方程 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

解 注意这两重约束（关系式）是联合约束，因此不建议分别对某一表达式计算偏导再代入——不仅不熟练时容易错，而且拆分时破坏了约束地位对等的整体性，会稍微提高计算量. 更推荐的是直接考虑约束的全微分，求解此方程组：

$$\begin{cases}f(x+t)-y=0,\\ y+g(x,t)=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}f'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}t)-\mathrm{d}y=0,\\ \mathrm{d}y+(g_x\,\mathrm{d}x+g_t\,\mathrm{d}t)=0,\end{cases} \tag{4.25}$$

[7]只能说感谢高中物竞带给我的强大计算能力，即便浪费了这些时间也写完了卷子，喜提班上第六

消去 $\mathrm{d}t$ 解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(g_t-g_x)f'}{g_t+f'}. \tag{4.26}$$

注 如果一定要拆分，可用第二个方程确定 $t=t(x,y)$，计算一次隐函数偏导：$t_x=-g_x/g_t$，$t_y=-1/g_t$. 再将 $t=t(x,y)$ 代入第一个方程 $y=f(x+y(x,y))$，再计算一次隐函数偏导：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(1+t_x)f'}{f'(x+t)t_y-1}=\frac{(g_t-g_x)f'}{g_t+f'}, \tag{4.27}$$

可见计算过程上并不如上述所解的方程组形式简洁优美.

9. [9.2.9 (2)(4)] 在下列各题中，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(a). $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$.　　(b). $z=\sin^2(ax+by)$.

解 重要的事情说三遍：剥蒜前观察！

(a). 联想正切和的公式，容易看出（自行验证）

$$z=\arctan x+\arctan y \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} z_{xx}=\partial_x[1/(1+x^2)]=-2x/(1+x^2)^2,\\ z_{xy}=0,\\ z_{yy}=-2y/(1+y^2)^2. \end{cases} \tag{4.28}$$

(b). 注意到

$$z=\frac{1-\cos u}{2},\quad u=2(ax+by), \tag{4.29}$$

并且 $u_x=2a$，$u_y=2b$ 均为常数，故

$$\partial_x^m\partial_y^n z=-\frac{(\partial_x^m u)(\partial_y^n u)}{2}(\cos u)_u^{(m+n)}=-2^{m+n-1}a^m b^n(\cos u)_u^{(m+n)}, \tag{4.30}$$

因此

$$z_{xx}=2a^2\cos(2ax+2by),\quad z_{xy}=2ab\cos(2ax+2by),\quad z_{yy}=2b^2\cos(2ax+2by). \tag{4.31}$$

10. [9.2.19 (2)(4)] 求下列复合函数的偏导数或导数.

(a). 设 $u=\mathrm{e}^{xyz}$，$x=rs$，$y=r/s$，$z=r^s$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial r},\dfrac{\partial u}{\partial s}$.

(b). 设 $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 对于显式简单变换，建议直接代入各变量而不必通过链式法则绕远路.

(a). $u(r,s)=\mathrm{e}^{r^{s+2}}$，因此 $u_r=(s+2)r^{s+1}\mathrm{e}^{r^{s+2}}$，$u_s=r^{s+2}\mathrm{e}^{r^{s+2}}\ln r$.

(b). $u(x)=(a\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{ax}/(a^2+1)$，因此 $u'(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin x$.

11. [9.3.11 (3)] 设 $\begin{cases} u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2-y), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

解 对于这种需要整体求解行列式的题，同样对方程组整体地求微分，即

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = f_1(u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) + f_2(\mathrm{d}v + \mathrm{d}y), \\ \mathrm{d}v = g_1(\mathrm{d}u - \mathrm{d}x) + g_2(2v\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}y), \end{cases} \tag{4.32}$$

整理后写成矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 - xf_1 & -f_2 \\ g_1 & 2vg_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uf_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 - xf_1 & -f_2 \\ g_1 & 2vg_2 - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} uf_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} uf_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 - xf_1 & -f_2 \\ g_1 & 2vg_2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{uf_1g_2 - f_2g_1}{(1 - xf_1)(2vg_2 - 1) + f_2g_1}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

12. [9.3.12 (1)] 设 $\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 对方程组整体取微分得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = f_1\mathrm{d}u + f_2\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = g_1\mathrm{d}u + g_2\mathrm{d}v \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = \frac{1}{f_1g_2 - f_2g_1} \begin{pmatrix} g_2 & -f_2 \\ -g_1 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

对比各项可得 u_x, u_y, v_x, v_y.

13. (9.4.9) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

解 椭球在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为 $x_0x + 2y_0y + z_0z = 1$，由题意

$$\begin{cases} x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 = -2y_0 = z_0/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \pm 2/\sqrt{22}, \\ y_0 = \mp 1/\sqrt{22}, \\ z_0 = \pm 4/\sqrt{22}, \end{cases} \tag{4.37}$$

因此切平面方程为 $x - y + 2z \pm \sqrt{22}/2 = 0$.

注 椭球切平面方程可以直接用，别学了隐函数求导就一通剥蒜，化简后发现是已知结论.

14. [9.4.17 (2)] 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $(-2, 1, 6)$ 的切线和法平面方程.

解 对于交面式曲线方程，其在某点的切线分别与两个曲面在该点的法向量垂直[8]，因此切线的方向向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (2x, 3y, z) \times (2x, 4y, -1)\Big|_{(-2,1,6)} = (-4, 3, 6) \times (-4, 4, -1) = -(27, 28, 4), \tag{4.38}$$

因此切线方程和法平面方程分别为

$$L : \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}, \quad \pi : 27x + 28y + 4z + 2 = 0. \tag{4.39}$$

15. (Ch9-1) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证：存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是

$$a_j \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{4.40}$$

解 (a). 必要性：若 $f(x_1, \cdots, x_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_n\right)$，则容易验证

$$\frac{1}{a_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = F'\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \frac{1}{a_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{4.41}$$

(b). 充分性：记 $f(x_1, \cdots, x_n) = G(x_1, \cdots, x_{n-1}, u)$，其中 $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$，则

$$\frac{1}{a_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial G}{\partial u}\right) (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad \frac{1}{a_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial G}{\partial u}. \tag{4.42}$$

由题设条件，$a_n\, \partial f/\partial x_i = a_i\, \partial f/\partial x_n$，因此 $\partial G/\partial x_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$，即 G 仅是 u 的函数，故 $\exists F \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = G(x_1, \cdots, x_{n-1}, u) = F(u) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right). \tag{4.43}$$

16. (Ch9-3) 若函数 $u = f(x, y, z)$ 满足恒等式 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$，则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的 Euler 定理：可微函数 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z). \tag{4.44}$$

解 (a). 必要性：若 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$，则对方程两端在 $t = 1$ 处求导可证

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = kf(x, y, z). \tag{4.45}$$

(b). 充分性：需要证明 $t^k f(x, y, z) \equiv f(tx, ty, tz)$，构造

$$F(x, y, z, t) = t^{-k} f(tx, ty, tz) - f(x, y, z), \tag{4.46}$$

[8]或者可以这么说，之所以叫“切线”，正是因为其同时在两个曲面在该点的切平面内

由题设条件，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= -kt^{-(k+1)}f(tx,ty,tz) + t^{-k}[xf_1(tx,ty,tz) + yf_2(tx,ty,tz) + zf_3(tx,ty,tz)] \\ &= t^{-(k+1)}[(tx)f_1(tx,ty,tz) + (ty)f_2(tx,ty,tz) + (tz)f_3(tx,ty,tz) - kf(tx,ty,tz)] \\ &\xlongequal{tx,ty,tz\to u,v,w} t^{-(k+1)}[uf_u(u,v,w) + vf_v(u,v,w) + wf_w(u,v,w) - kf(u,v,w)] = 0,\end{aligned} \tag{4.47}$$

因此 $F(x,y,z,t)$ 关于 t 是常数，即

$$F(x,y,z,t) = F(x,y,z,1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z). \tag{4.48}$$

17. (Ch9-8) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域，$f \in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{4.49}$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

解 这里给出两种证法.

(a). Method 1: 适合考试的中规中矩方案. 注意到题设条件的形式为 $(x,y)\cdot\nabla f = 0$，联想到二元函数的 Taylor 公式：

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(0,0) + xf_1(\theta(x,y)x, \theta(x,y)y) + yf_2(\theta(x,y)x, \theta(x,y)y) \\ &\xlongequal[v=\theta y]{u=\theta x} f(0,0) + \frac{1}{\theta}[uf_u(u,v) + vf_v(u,v)] = f(0,0),\end{aligned} \tag{4.50}$$

因此 $f(x,y)$ 为常函数.

(b). Method 2: 偏门的 PDE 方案. 利用一阶线性偏微分方程的解法，解常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{x} = \text{const}\,. \tag{4.51}$$

作变量代换 $\begin{cases}\xi = y/x, \\ \eta = x\end{cases}$，则题设条件化为

$$0 = x\cdot\left(-\frac{y}{x^2}f_\xi + f_\eta\right) + y\cdot\frac{f_\xi}{x} = xf_\eta \quad \Longrightarrow \quad f = g(\xi) = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.52}$$

而 f 在原点处有定义，若 $g(u)$ 不是常函数，则 u 在原点无定义，从而 g 无函数值. 因此 $f(x,y) = g(y/x)$ 为常函数.

注 对于一阶齐次线性偏微分方程（自行推广至更多元）

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z = 0, \tag{4.53}$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{b} = \frac{\mathrm{d}z}{c}, \tag{4.54}$$

从中解得

$$\begin{cases} f(x,y,z)=C_1, \\ g(x,y,z)=C_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \xi=f(x,y,z), \\ \eta=g(x,y,z), \end{cases} \tag{4.55}$$

再取与 ξ,η 线性无关的变量代换 ζ，则原方程可化为

$$u_\zeta=0 \quad \Longrightarrow \quad u=h(\xi,\eta). \tag{4.56}$$

18. (Ch9-11) 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.57}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

解 (a). 充分性：若 $u(x,y)=f(x)g(y)$，容易证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x)g(y)\cdot f(x)g'(y)=f(x)g(y)\cdot f'(x)g'(y)=u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}. \tag{4.58}$$

(b). 必要性：若熟悉二阶线性偏微分方程的解，可知 $\ln u(x,y)=\ln f(x)+\ln y$ 即双曲型方程的解，因此考虑 $\ln u$ 是否满足方程 $\dfrac{\partial^2 \ln u}{\partial x\partial y}=0$.

记 $g(x,y)=\ln u(x,y)$，由题设条件

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_y}{u}\right)=\frac{uu_{xy}-u_xu_y}{u^2}=0, \tag{4.59}$$

分别对 x,y 积分得

$$g(x,y)=\ln u(x,y)=F(x)+G(y) \quad \Longrightarrow \quad u(x,y)=\mathrm{e}^{F(x)}\mathrm{e}^{G(y)}. \tag{4.60}$$

因此存在 $f(x)=\mathrm{e}^{F(x)}$ 和 $g(y)=\mathrm{e}^{G(x)}$，使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

注 “双曲型方程是什么”以及“为什么化为二阶混合偏导”的问题，已在2节中的最后一题的“注”中进行了解释.

19. (Ch9-13) 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏函数，且满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4.61}$$

如果 $f(x,0,0)>0$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立，求证：对 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，也有 $f(x,y,z)>0$.

解 由 Ch9-1 的结论，存在函数 F 使得 $f(x,y,z)=F(x+y+z)$. 由题意 $f(x,0,0)=F(x)>0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上成立，因此 $f(x,y,z)=F(x+y+z)>0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上成立.