多元函数的微分学（一）

邓嘉驹

2023 年 7 月 8 日

目录

1 多元函数的极限与连续性 **2**
1.1 平面点集 2
1.2 二元函数的极限与连续性 2
1.3 有界闭区域上连续函数的性质 2
1.4 例题 3

2 偏导数与全微分 **4**
2.1 偏导数的定义 4
2.2 全微分的定义 4
2.3 三个定理 4
2.4 例题 5

3 高阶偏导数与多元复合函数微分法 **5**
3.1 多元函数微分学概念关系 5
3.2 高阶偏导数及其特性 5
3.3 例题 6

4 复合函数与隐函数微分法 **6**
4.1 隐函数存在定理及隐函数微分法 6
4.2 例题 7

5 补充习题 **7**

1 多元函数的极限与连续性

1.1 平面点集

1. 点 M_0 的 δ 邻域（开区域）：$\bar{U}(M_0,\delta) \triangleq \{M||MM_0|<\delta\}$.
2. 点集 E 的内点 M_0：$\exists\delta>0$，使得 $\bar{U}(M_0,\delta)\subset E$.
3. 开集：全由内点[1]组成的集合.
4. （开）区域 D：D 中任意两点均可用曲线连接（连通性）.
5. 闭区域（闭域）$\bar{D}=D+\partial D$，其中 ∂D 为 D 的边界.
6. $\mathbb{R}^2,\varnothing$ 既为开集，又为闭集.

1.2 二元函数的极限与连续性

1. 极限：设点 $M(x,y),M_0(x_0,y_0)$，则若对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta(\varepsilon,M_0)>0$，当 $|MM_0|<\delta$ 时，满足 $|f(M)-A|<\varepsilon$，则称当 $M\to M_0$ 时，$f(M)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.
2. 连续：特别地，若 $A=f(M_0)$，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 处连续. 若 $f(x,y)$ 在点集 E 内中每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 E 上连续.
3. 二元函数极限的常用（通用）求解方法：作极坐标变换 $\begin{cases}x=x_0+\rho\cos\theta,\\ y=y_0+\rho\sin\theta,\end{cases}$ 代入表达式中得到 $g(\rho,\theta)=f(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))$，再求 $\rho\to0$ 的极限.

   若要求沿某一轨迹的极限，则写出轨迹的极坐标方程，代入 $\theta=\theta(\rho)$ 关系再求解.

注 二重极限 $\neq$ 累次极限（常作为作业题、考题），即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\neq\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，例如对于 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)\text{振荡发散}.$$

1.3 有界闭区域上连续函数的性质

1. 有界性.
2. 最值性.
3. 介值性.
4. 零值性.
5. 一致连续性：对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|MM_0|<\delta(\varepsilon)$ 时，满足 $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$.

[1] 区别开集与闭集：是否包含边界点

1.4 例题

1. 判断下列极限是否存在，若有极限，求出其极限；若无极限，说明理由.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

2. 研究 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y,\\ 0, & x=y\end{cases}$ 的连续性.

解 (1)

(2) 由于表达式分母是非齐次的，因此无法作极坐标变换. 考虑到 $x^4+y^2\geqslant 2x^2|y|$，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{2} = 0,$$

由夹逼准则，极限为 0.

(3) 同上一问解法，但 $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{|y|}{y}$ 不存在，故极限不存在.

注 证明极限不存在通常有另一种更常用的方式：取路径 $y^m=kx^n$，通常 $m=1$，若最终表达式不含 x 且与 k 有关，则极限不存在.

(4) 将分子有理化，再作极坐标变换：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)} = \frac{1}{2}\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0.$$

(5) 注意到 $x^2+y^2\leqslant (x+y)^2$ $(x,y>0)$，则

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)} \leqslant \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)} \xlongequal{u=x+y} \lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{\mathrm{e}^u} = 0,$$

由夹逼准则，极限为 0.

(6) 作极坐标变换：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} = 0.$$

(7) 作极坐标变换：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)=0.$$

当 $x\neq y$ 时，$f(x,y)$ 为初等函数，显然连续；当 $y\to x$ 时，作极坐标变换：

$$\lim_{y\to x}f(x,y)=\lim_{\theta\to\pi/4}\frac{\rho\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\neq0,$$

因此当 $y\to x$ 时，$f(x,y)$ 不连续.

2 偏导数与全微分

2.1 偏导数的定义

设 $z=f(x,y)$ 在 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 内有定义，且 $M_1(x_0+\Delta x,y_0),M_2(x_0,y_0+\Delta y)\subset\bar{U}(M_0,\delta)$，则

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\triangleq\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=z'_x(M_0)=f'_x(M_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{M_0},$$

$$\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\triangleq\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=z'_y(M_0)=f'_y(M_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{M_0},$$

上述两式分别称为 $z=f(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数.

2.2 全微分的定义

设 $z=f(x,y)$ 在 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 内有定义，且 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\subset\bar{U}(M_0,\delta)$，则若全增量 $\Delta z=f(M)-f(M_0)$ 可写为如下形式：

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为其在 M_0 处的全微分.

2.3 三个定理

1. 可微 $\Longrightarrow$ 可偏导，且 $A=f'_x(M_0),B=f'_y(M_0)$（反之未必）.
2. 可微 $\Longrightarrow$ 连续（反之未必）.
3. $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微 $\Longleftrightarrow\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f'_x(M_0)\Delta x-f'_y(M_0)\Delta y}{\rho}$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

2.4 例题

1. 证明：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处连续但不可偏导.
2. 证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可偏导但不连续，从而不可微，并求 $f'_x(1,1), f'_y(2,3)$.
3. 设 $x,y,z>0$，a 为正的常数，$u(x,y,z)=x^{y^z}+x^{a^y}+a^{y^x}+y^{z^a}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 及 $\mathrm{d}u\big|_{(1,1,1)}$.
4. 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
5. 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a（其中二阶偏导数均连续）.

解 1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho=0=f(0,0)$，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续，但

$$f'_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

此极限不存在，因此 $f'_x(0,0)$ 不存在. 同理 $f'_y(0,0)$ 也不存在.

2. 上一节中已证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

3 高阶偏导数与多元复合函数微分法

3.1 多元函数微分学概念关系

1. 可微 $\Longrightarrow$ 可偏导、连续.
2. 存在且连续的 $f'_x(M_0), f'_y(M_0)\Longrightarrow$ 可微.
3. 存在且有界的 $f'_x(M_0), f'_y(M_0)\Longrightarrow$ 连续.

3.2 高阶偏导数及其特性

1. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\forall (x,y)\in D$.
2. 若 $z=f(u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 皆可微，且复合有意义，则有链式法则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

3.3 例题

1. 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$ 连续，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^3 u}{\partial^2 x\partial y}$.

2. 证明：$u(t,x)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 是波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(a,t>0,-\infty<x<+\infty)$ 的通解，其中 φ,ψ 连续.

3. 证明：$u(t,x)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4a^2t}$ 满足热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4 复合函数与隐函数微分法

4.1 隐函数存在定理及隐函数微分法

设 $F(x,y)$ 连续，$F(M_0)=F(x_0,y_0)=0$，且 $F'_x(M_0)$ 或 $F'_y(M_0)$ 非零，则有

1. $\exists\delta>0$，使得方程 $F(x,y)=0$ 在 $I=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中可唯一确定函数 $y=\varphi(x)$（隐函数），且 $y_0=\varphi(x_0)$.

2. $\varphi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在 I 中连续，且 $\varphi'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

计算隐函数的技巧：结合链式法则，从外层逐层剥离所需的复合函数关于某变量的偏导数，再进行回代.

注 隐函数存在定理的反例

1. 考虑方程

$$F(x,y,)=y^3-x=0$$

在点 $(0,0)$ 处，$F(0,0)=0$，$F'_y(0,0)=0$. 然而，方程在 $(0,0)$ 附近确实存在隐函数（可以直接从方程中解出来）

$$y=x^{\frac{1}{3}}$$

但是在 $x=0$ 处不可导. 这个例子说明定理中条件 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ 只是充分条件.

2. 考虑方程

$$F(x,y)=x^3+y^3-3axy$$

（对应的曲线称为 Descartes 叶形线）. 对函数 $F(x,y)$ 的两个变量分别求导得

$$F'_x(x,y)=3x^2-3ay,\ F'_y(x,y)=3y^2-3ax$$

. 注意到原点虽然满足方程 $F(0,0)=0$，但是 $F_x(0,0)=0,F_y(0,0)=0$，定理在 $(0,0)$ 失效. 从图形上看，曲线在点 $(0,0)$ 处自相交，因此，在这一点的附近，任何给定的 x（或 y），都无法做到单值地对应一个 y（或 x）. 也就是说隐函数不可能存在.

一般地，若曲线 $F(x,y)=0$ 自相交，则在交点处 $F(x,y)$ 的两个偏导数一定为 0, 否则只要一个不为 0，就会存在隐函数，这显然是不可能的.

4.2 例题

1. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $x=x(z),y=y(z)$ 是方程组 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 所确定的隐函数组，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

3. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由下列方程所确定的隐函数组，求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

   (1) $\begin{cases}u^2+v^2+x^2+y^2=1\\ u+v+x+y=0\end{cases}$;

   (2) $\begin{cases}xu-yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}$;

   (3) $\begin{cases}u=f(ux,v+y)\\ v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$

4. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

   (1) $\begin{cases}x=f(u,v)\\ y=g(u,v)\end{cases}$

   (2) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$

5 补充习题

1. 证明：在极坐标变换 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 下，二维 Laplace 方程 $\Delta_2 u=0$ 即 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 可写为如下形式：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0\quad\text{或}\quad\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0.$$

   证 由题意，

$$\begin{aligned}\partial_\rho u&=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,\\ \partial_\rho(\rho\partial_\rho u)&=\partial_\rho u+\rho(u_{xx}\cos^2\theta+2u_{xy}\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^2\theta),\\ \partial_\theta u&=u_x\cdot(-\rho\sin\theta)+u_y\cdot\rho\cos\theta,\\ \partial_\theta^2 u&=\rho^2(u_{xx}\sin^2\theta-2u_{xy}\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^2\theta)-\rho(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\\&=u_{xx}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+0+u_{yy}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\frac{0}{\rho}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

2. 证明：在球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\theta\end{cases}$ 下，三维 Laplace 方程 $\Delta_3 u=0$ 即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 可写为如下形式：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

证 由题意，

$$\begin{aligned}\partial_r u&=u_x\sin\theta\cos\varphi+u_y\sin\theta\sin\varphi+u_z\cos\theta,\\\partial_r(r^2\partial_r u)&=2r\partial_r u+r^2(u_{xx}\sin^2\theta\cos^2\varphi+u_{yy}\sin^2\theta\sin^2\varphi+u_{zz}\cos^2\theta\\&\quad+2u_{xy}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+2u_{yz}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi+2u_{zx}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),\\\partial_\theta u&=u_x\cdot r\cos\theta\cos\varphi+u_y\cdot r\cos\theta\sin\varphi+u_z\cdot(-r\sin\theta),\\\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u)&=\cos\theta\partial_\theta u+r\sin\theta(-u_x\sin\theta\cos\varphi-u_y\sin\theta\sin\varphi-u_z\cos\theta)\\&\quad+r^2\sin\theta(u_{xx}\cos^2\theta\cos^2\varphi+u_{yy}\cos^2\theta\sin^2\varphi+u_{zz}\sin^2\theta\\&\quad+2u_{xy}\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-2u_{yz}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi-2u_{zx}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),\\\partial_\varphi u&=-u_x\cdot r\sin\theta\sin\varphi+u_y\cdot r\sin\theta\cos\varphi,\\\partial_\varphi^2 u&=-r\sin\theta(u_x\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\sin^2\theta(u_{xx}\sin^2\varphi+u_{yy}\cos^2\varphi-2u_{xy}\sin\varphi\cos\varphi),\end{aligned}$$

代入，按 u 的各阶导数合并项可证.

3. 设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定了隐函数组 $\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y)\end{cases}$ 及反函数组 $\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v).\end{cases}$

(1) 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\mathrm{d}u,\mathrm{d}v.$

(2) 证明[2]：$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$

解 i. 将方程组两端取微分得

$$\begin{cases}F'_x\,\mathrm{d}x+F'_y\,\mathrm{d}y+F'_u\,\mathrm{d}u+F'_v\,\mathrm{d}v=0,\\G'_x\,\mathrm{d}x+G'_y\,\mathrm{d}y+G'_u\,\mathrm{d}u+G'_v\,\mathrm{d}v=0,\end{cases}\Longrightarrow\quad\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{(F'_vG'_x-F'_xG'_v)\,\mathrm{d}x+(F'_vG'_y-F'_yG'_v)\,\mathrm{d}y}{F'_uG'_v-F'_vG'_u},\\\mathrm{d}v=\dfrac{(F'_uG'_x-F'_xG'_u)\,\mathrm{d}x+(F'_uG'_y-F'_yG'_u)\,\mathrm{d}y}{F'_vG'_u-F'_uG'_v},\end{cases}$$

利用 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的表达式，可求出 u,v 对 x,y 的偏导数.

[2] 见于多重积分坐标变换

不想算辣！

注 此结论可推广至 n 元情形：$\dfrac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}=1$，其中 $\dfrac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 为行列式，其第 (i,j) $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 元为 $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$（简记为 $\partial_i u_j$）.

4. 证明：方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 经变换 $\xi=x+y,\eta=3x-y$ 后变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0$（其中二阶导数均连续），并求解此方程. 将 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 反解得到 $x=(\xi+\eta)/4, y=(3\xi-\eta)/4$，因此

$$\partial_\xi u=\frac{1}{4}u_x+\frac{3}{4}u_y,\quad \partial_{\xi\eta}u=\frac{1}{16}u_{xx}+\frac{1}{8}u_{xy}-\frac{3}{16}u_{yy},$$

那么方程可化为

$$0=\frac{\partial u}{\partial\xi\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

方程两端同时乘 16 即可. 现利用化简后的偏微分方程（即 u 关于 ξ,η 的偏导数的方程），记 $v=\partial u/\partial\xi$，则方程写为

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{1}{2}v=0\quad\Longrightarrow\quad v(\xi,\eta)=f'(\xi)\mathrm{e}^{-\eta/2},\ f(\xi)\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}),$$

那么

$$u(x,y)=\int v(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi=f(\xi)\mathrm{e}^{-\eta/2}+g(\eta)=f(x+y)\mathrm{e}^{-(3x-y)/2}+g(3x-y).$$

注 关于这类题在数理方程课程中有过讨论，其证明仅利用数学分析的知识，实际上并不困难，但这里只给出结论，有必要的话在后续课程中给出证明.

该偏微分方程对应的特征方程为 $(\mathrm{d}y)^2-2(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y)-3(\mathrm{d}x)^2=0$. 由于 $\Delta=(-1)^2-1\cdot(-3)=4>0$，故该方程为双曲型的. 解该方程得 $\partial y/\partial x=3$ 和 $\partial y/\partial x=-1$，即隐式解

$$\varphi(x,y)=x+y=0,\quad \psi(x,y)=3x-y=0,$$

因此作变量代换 $\xi=\varphi(x.y)=x+y,\eta=\psi(x,y)=3x-y$. 由于方程是双曲型的，因此这样的变量代换一定能将方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+c_1\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+c_2\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+c_3u=0$ 的形式. 利用此变量代换具体计算后和得系数 c_i.

当然，因为已知方程形式，一种偷懒的方式是只算各阶偏导数中的一阶导系数，而其余项不管.

5. 证明：方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos x-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2 x-\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin x=0$ 经变换 $\xi=x-\sin x+y,\eta=x+\sin x-y$ 后变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$（其中二阶导数均连续），并求解此方程.

证

$$
\begin{aligned}
u_x &= \partial_\xi u(1-\cos x) + \partial_\eta u(1+\cos x),\\
u_y &= \partial_\xi u - \partial_\eta u,\\
u_{xx} &= \sin x(\partial_\xi u - \partial_\eta u) + \partial_{\xi\xi} u(1-\cos x)^2 + \partial_{\eta\eta}(1+\cos x)^2 + 2\partial_{\xi\eta} u(1-\cos^2 x),\\
u_{xy} &= \partial_x(u_y) = \partial_{\xi\xi} u(1-\cos x) + 2u_{\xi\eta}\cos x - \partial_{\eta\eta} u(1+\cos x),\\
u_{yy} &= \partial_{\xi\xi} u - 2\partial_{\xi\eta} u + \partial_{\eta\eta} u,
\end{aligned}
$$

代入可证.

6. 设 $u = f(x,y,z), \varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0, y = \sin x$，其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $y = \sin x$ 确定了 $y(x)$，那么代入 $y(x)$ 后，$\varphi(x, \mathrm{e}^y, z) = 0$ 确定了 $z(x)$. 由隐函数求辅导法则，

$$
z'_x = -\frac{\varphi'_1 + \varphi'_2 \cdot \mathrm{e}^y y'_x}{\varphi'_3} = -\frac{\varphi'_1 + \varphi'_2 \mathrm{e}^y \cos x}{\varphi'_3}.
$$

因此

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_x + f'_y y'_x + f'_z z'_x = f'_x + f'_y \cos x - f'_z \frac{\varphi'_1 + \varphi'_2 \mathrm{e}^y \cos x}{\varphi'_3}.
$$

7. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 对两方程求全微分得

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}z = [f(x+y) + xf'(x+y)]\mathrm{d}x + xf'(x+y)\,\mathrm{d}y\,,\\
F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y + F'_z\,\mathrm{d}z = 0,
\end{cases}
$$

从中消去 $\mathrm{d}y$ 项，最终可得

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{F'_y f(x+y) + xf'(x+y)(F'_y - F'_x)}{F'_y + xf'(x+y)F'_z}.
$$

8. 函数 $u = u(x,y)$ 由方程组 $u = f(x,y,z,t), g(y,z,t) = 0, h(z,t) = 0$ 定义，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 先从外层剥离分析：由于需要求 u 关于 x, y 的偏导数，因此结合第一式，希望得到 $z(x,y)$ 和 $t(x,y)$。由最后两式可知，z, t 均只依赖于 y，而与 x 无关，因此 $\partial u/\partial x = f'_x$. 将后两式取全微分得[3]：

$$
\begin{cases}
g'_y\,\mathrm{d}y + g'_z\,\mathrm{d}z + g'_t\,\mathrm{d}t = 0,\\
h'_z\,\mathrm{d}z + h'_t\,\mathrm{d}t = 0,
\end{cases}
$$

[3]实际上是因为最后一式无法给出 z, t 与 y 的直接关系

从中解得

$$z'_y = \frac{-h'_t g'_y}{h'_t g'_z - g'_t h'_z}, \quad t'_y = \frac{h'_z g'_y}{h'_t g'_z - g'_t h'_z},$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + f'_z z'_y + f'_t t'_y = f'_y - g'_y \frac{h'_t f'_z - f'_t h'_z}{h'_t g'_z - g'_t h'_z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x.$$