第十五周作业

邓嘉驹

更新：June 29, 2026

目录

1 观前提示 **2**

2 Exercise 13.1 **2**

3 Exercise 13.3 **3**

4 Exercise 13.4 **5**

1 观前提示

本次作业解答偏提示性，主要作用是提供解题思路，因此比较简略. 考试时应严格书写放缩到什么函数、利用了什么判别法，尤其是给出敛散性相同的 p-级数后，多说一句该 p-级数收敛还是发散.

2 Exercise 13.1

1. 判断下列反常积分的收敛性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

解 先判断 $x=0$ 非奇点，再利用放缩 $\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} < x^{-3/2}$ 以及后者在 $[1,+\infty)$ 上的收敛性即可.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$

解 当 $x\to+\infty$ 时，$x\arctan x/\sqrt[3]{1+x^4}\sim \pi/2x^{1/3}$，故被积函数在 $[1,+\infty)$ 上积分发散，该广义积分发散.

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}x.$

解 当 $x\to 1^-$ 时，$x^2/\sqrt[3]{(1-x^2)^5}\sim 1/[2(1-x)]^{5/3}$，故发散.

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}.$

解 $x=1$ 非奇点，而当 $x\to 0^+$ 时，$1/(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)\sim 1/\sqrt{x}$，故收敛.

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 注意到

$$\text{原式} = 2\sqrt{x}\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.1}$$

其中已利用

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x/\sin x}{-1/2x^{3/2}} = 0. \tag{2.2}$$

显然 $x=\pi/2$ 并非新积分的奇点，而当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x}\cos x/\sin x\sim 1/\sqrt{x}$，故新广义积分收敛，即原广义积分也收敛.

(14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\mu}\,\mathrm{d}x.$

解 在 $[0,1)$ 上，$f(x)=\arctan x/x^\mu\sim 1/x^{\mu-1}$，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛要求 $\mu<2$；在 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)\sim 1/x^\mu$，$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛要求 $\mu>1$. 综上，当 $1<\mu<2$ 时，该广义积分收敛，否则发散.

2. 研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x.$

解 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x)/x^2(1+x^p)\sim 1/x$，故该广义积分发散.

3 Exercise 13.3

1. 试用两种方法计算以下极限：

(1) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x.$

解 Method 1 显然被积函数在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，故该积分关于 α 连续，从而

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1. \tag{3.1}$$

Method 2 作变量代换 $x=\alpha\sinh t$，记 $\alpha\sinh t_0=1$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{\alpha\to 0}2\int_0^{t_0}\alpha\cosh t\cdot\alpha\cosh t\,\mathrm{d}t=\lim_{\alpha\to 0}\alpha^2(t_0+\sinh t_0\cosh t_0)\\&=\lim_{\alpha\to 0}\alpha^2\left[\ln\left(\frac{1}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}\right)+\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}\right]\\&\xlongequal{u=1/\alpha}1+\lim_{u\to\infty}\frac{\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)}{u^2}=1+\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}}=1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}.$

解 Method 1 显然被积函数在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，故该积分关于 α 连续，从而

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan 1=\frac{\pi}{2}. \tag{3.3}$$

Method 2 直接积分：

$$\text{原式}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+\alpha^2}\arctan\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\bigg|_{\alpha}^{1+\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)=1. \tag{3.4}$$

2. 求 $F'(\alpha)$：

(1) $\displaystyle F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解 由题意，

$$F'(\alpha)=-\sin\alpha\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.5}$$

(3) $\displaystyle F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

解 由题意，

$$F'(\alpha)=\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}+\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha x}=\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}+\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}=2\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}. \tag{3.6}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(x)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t\,,\quad c,x\in[a,b) \tag{3.7}$$

满足常微分方程

$$y''+k^2y=f(x), \tag{3.8}$$

其中 c 与 k 为常数.

解 由题意，$f(t)\sin k(x-t)$ 在 $[a,b]^2$ 上关于 x 具有任意阶连续偏导数，故 $y(x)$ 可微，且

$$y'(x)=0+\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.9}$$

$$y''(x)=f(x)-k\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t=f(x)-k^2y(x), \tag{3.10}$$

即 $y''+k^2y=f(x)$，证毕.

注 至于方程的解为什么是这个形式，其实用到的正是上一章学习的 Fourier 变换，这里给出其大体思路. 记 $Y(\lambda)=F[y(x)]$，其中 F 表示 Fourier 变换，则有性质

$$\begin{aligned}F[y^{(n)}(x)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}y^{(n)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=y^{(n-1)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}y^{(n-1)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\\&=0+\mathrm{i}\lambda\,y^{(n-2)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+(\mathrm{i}\lambda)^2\int_{-\infty}^{+\infty}y^{(n-2)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\\&=\cdots=(\mathrm{i}\lambda)^n\int_{-\infty}^{+\infty}y(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=(\mathrm{i}\lambda)^nY(\lambda),\end{aligned} \tag{3.11}$$

因此对微分方程两端作 Fourier 变换，可得

$$(k^2-\lambda^2)Y(\lambda)=F(\lambda)\quad\Longleftarrow\quad Y(\lambda)=F(\lambda)\cdot\frac{1}{k^2-\lambda^2}, \tag{3.12}$$

其中 $F(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换. 再利用 Fourier（逆）变换的卷积性质以及常用变换：

$$F^{-1}\left[\frac{1}{k^2-\lambda^2}\right]=\frac{\sin kx}{2k}\mathrm{sgn}(x), \tag{3.13}$$

其中 $\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数，可得原方程的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=f(x)I_{[a,b]}(x)*\frac{\sin kx}{2k}\mathrm{sgn}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)I_{[a,b]}(t)\frac{\sin k(x-t)}{2k}\mathrm{sgn}(x-t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2k}\int_x^b f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

当然，这里实际上考虑的并非 $y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的解，并且也假定了 $y(\infty)=0$，因此这里得到的解需要经过修正才能得到题设的解，这里不再赘述.

4. 应用对参数进行微分或积分的方法，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{pi/2}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\mathrm{d}x\ \ (a>0,b>0).$

解 可微证明略，记该积分为 $I(a)$，则

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\tan^2 x}{a^2\tan^2 x + b^2}\frac{\mathrm{d}\tan x}{1+\tan^2 x} \\ &= \frac{2a}{b^2-a^2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2\tan^2 x} - \frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\mathrm{d}\tan x \\ &= \frac{2a}{b^2-a^2}\left(\frac{b}{a}\arctan\frac{ax}{b} - x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a}{b+a}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

同时

$$I(b) = \int_0^{\pi/2} \ln b^2\,\mathrm{d}x = \pi\ln b, \tag{3.16}$$

因此

$$I(a) = I(b) + \int_b^a I'(u)\,\mathrm{d}u = \pi\ln b + \pi\ln\frac{b+a}{2b} = \pi\ln\frac{a+b}{2}. \tag{3.17}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x + a^2\right)\mathrm{d}x \ \ (0 \leqslant a < 1).$

解 可微证明略，记该积分为 $I(a)$，则

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}\right)\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t=\tan(x/2)} \frac{\pi}{a} - \frac{1-a^2}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2-2a\cdot(1-t^2)/(1+t^2)}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{a} - 2\frac{1-a^2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1-a)^2 + (1+a)^2t^2} \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a}\arctan\frac{1+a}{1-a}t\Big|_0^{+\infty} = 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

同时 $I(0) = 0$，因此

$$I(a) = I(0) + \int_0^a I'(u)\,\mathrm{d}u = 0. \tag{3.19}$$

4 Exercise 13.4

1. 确定下列含参变量反常积分的收敛域.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^u\,\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int_0^1 x^u\,\mathrm{d}u$ 收敛要求 $u > -1$，$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^u\,\mathrm{d}u$ 收敛要求 $u < -1$，因此该广义积分收敛域为空集.

2. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (-\infty < u < +\infty).$

解 注意到

$$\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi\text{收敛}, \tag{4.1}$$

由 Weierstrass 判别法，该积分在 $-\infty < u < +\infty$ 上一致收敛.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha x}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \ (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

解 注意到

$$\text{原式} \xlongequal{u=\sqrt{\alpha}x} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.2}$$

收敛至与 α 无关的常数，故该广义积分在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

6. 证明 $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 是连续且可微的函数.

解 注意到

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{且} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\text{收敛}, \tag{4.3}$$

由 Weierstrass 判别法，该积分在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛，从而 $F(\alpha)$ 连续. 记 $f(x,\alpha) = \cos x/[1+(x+\alpha)^2]$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} \frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{1+\alpha^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned} \tag{4.4}$$

而前一项在 $[0,+\infty)$ 上无奇点，后一项仿照上一问思路也可以证明其关于 α 一致收敛，因此该广义积分关于 α 一致收敛，从而 $F(\alpha)$ 可微

7. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,\mathrm{d}x \ (\alpha,\beta > -1)$.

解 记 $f(x,\beta) = (x^\beta - x^\alpha)/\ln x$ 且 $F(\beta) = \displaystyle\int_0^1 f(x,\beta)\,\mathrm{d}x$，注意到当 $\beta \neq \alpha$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta - x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0, \tag{4.5}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)\ln x} - 1}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-} (\beta-\alpha)x^\alpha = \beta - \alpha, \tag{4.6}$$

因此 $x = 1$ 并非 $f(x,\beta)$ 的奇点，故 $f(x,\beta)$ 在 $[1/2,1]$ 上的积分收敛. 另一方面，当 $x \to 0^+$ 时，总 $\exists \beta_0 < \beta$，当 $\beta \in [\beta_0,+\infty)$ 时，$f(x,\beta) \leqslant f(x,\beta_0)$. 由于 $f(x,\beta_0)$ 是 $x_0^\beta - x^\alpha$ 的高阶无穷小且 $\displaystyle\int_0^{1/2} (x^{\beta_0} - x^\alpha)\,\mathrm{d}x$ 收敛，故 $f(x,\beta_0)$ 在 $[0,1/2)$ 上的积分也收敛. 综上，该广义积分 $F(\beta)$ 在 $[\beta_0,+\infty)$ 内一致收敛，并且

$$\int_0^1 f_\beta(x,\beta)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\beta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta+1} \tag{4.7}$$

在 $[\beta_0,+\infty)$ 上收敛，因此 $F(\beta)$ 在 $[\beta_0,+\infty)$ 内可微. 由 β 的任意性，$F(\beta)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内可微，并且

$$F'(\beta)=\frac{1}{\beta+1}\quad\Longleftarrow\quad F(\beta)=F(\alpha)+\int_\alpha^\beta F'(u)\,\mathrm{d}u=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}. \tag{4.8}$$

8. 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 及 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x\ (\sigma>0)$.

解 实际上此题中存在高斯分布（也称正态分布）$N(a,\sigma)$，其概率密度函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-a)^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma$ 满足归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-[(x-a)/\sqrt{2}\sigma]^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1, \tag{4.9}$$

其均值为 a，即

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x+a\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0+a=a, \tag{4.10}$$

其中第一项积分为零已利用 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称的性质.