# 第十二周作业

邓嘉驹

更新：May 19, 2025

## 目录

**1 Exercise 11.3** **2**

**2 Exercise 11.7** **3**

**3 Exercise 12.1** **7**

# 1 Exercise 11.3

7. 设 $D$ 是平面上由简单闭曲线 $L$ 围成的区域.

(1) 如果 $f(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{1.1}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 $L$ 的单位外法向量，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 称为二维 Laplace 算子. 因此，当 $f$ 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 时，有 $\oint_L \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = 0$.

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是单位常值向量，证明：

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.2}$$

(3) 如果 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明下列第二 Green 公式：

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1.3}$$

**证明.** (1) 设二维曲线单位法向 $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$，那么其逆时针方向的切向位矢微元为

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x), \tag{1.4}$$

因此由 Green 公式，

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \oint_K \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_L -f_y\,\mathrm{d}x + f_x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (f_{xx}+f_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{RHS}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

(2) 记 $\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = (a_x, a_y)$，则由第 (1) 问的结论，

$$\text{LHS} = \oint_L \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\,\mathrm{d}s = \oint_L -a_y\,\mathrm{d}x + a_x\,\mathrm{d}y = 0 = \text{RHS}. \tag{1.6}$$

(3) 由第 (1) 问的结论，

$$\text{LHS} = \oint_L -(vu_y - uv_y)\,\mathrm{d}x + (vu_x - uv_x)\,\mathrm{d}y = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{RHS}. \tag{1.7}$$

## 2 Exercise 11.7

2. 求下列曲线积分.

(1) $\int_L (2x+y)\,\mathrm{d}x + (x+4y+2z)\,\mathrm{d}y + (2y-6z)\,\mathrm{d}z$，其中 $L$ 由点 $P_1(a,0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0 \end{cases}$ 到 $P_2(0,a,0)$，再由 $P_2$ 沿直线 $\begin{cases} z+y=a, \\ x=0 \end{cases}$ 到点 $P_3(0,0,a)$；

**解** 注意到微分式实际上为全微分，其原函数为

$$F(x,y,z) = x^2 + xy + 2y^2 + 4yz - 3z^2 + C, \tag{2.1}$$

故积分值只与初末态有关，即

$$\text{原式} = F(P_3) - F(P_1) = (-3a^2) - a^2 = -4a^2. \tag{2.2}$$

(2) $\int_{AMB} (x^2-yz)\,\mathrm{d}x + (y^2-zx)\,\mathrm{d}y + (z^2-xy)\,\mathrm{d}z$，其中 $AMB$ 是柱面螺线 $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=h\varphi/2\pi$ 上点 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 这一段.

**解** 注意到微分式实际上为全微分，其原函数为

$$F(x,y,z) = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} - xyz + C, \tag{2.3}$$

故积分值只与初末态有关，即

$$\text{原式} = F(B) - F(A) = \frac{h^3}{3}. \tag{2.4}$$

**注** 牢记我们为什么用 Stokes 定理：尽管场无旋与场有势等价，但对于简单的微分式（例如常见的多项式）或者结构明显的表达式（例如 $\sin(x/y)$ 关于 $x,y$ 的偏导项），证明其为全微分同样可等价说明场有势. 因此我们更希望不引入额外的计算量，不采用 Stokes 公式而采用“积分 + 观察”的方法. 以第 (1) 题为例，我们可以先对 $(2x+y)\,\mathrm{d}x$ 积分，得到 $(x^2+xy)+f(y,z)$，当然如果在草稿纸上书写，为简洁起见，可不带上 $f(y,z)$，心里记住就好. 接下来对 $y$ 求导，对比系数：

$$x + f_y = x + 4y + 2z \quad\Longrightarrow\quad f(y,z) = 2y^2 + 2yz + g(z), \tag{2.5}$$

再对 $z$ 求导，对比系数：

$$2y + g' = 2y - 6z \quad\Longrightarrow\quad g(z) = -3z^2 + C, \tag{2.6}$$

从而可得原函数. 当然，即便是考试，哪怕你说由“惊人的注意力”看出其原函数也不会扣分，只要结果正确即可.

3. 证明下列向量场是有势场，并求出它们的势函数.

(2) $\boldsymbol{v} = yz(2x+y+z)\boldsymbol{i} + zx(2y+z+x)\boldsymbol{j} + xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$.

**解** 注意到对任意路径 $L$，积分值

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_L yz(2x+y+z)\,\mathrm{d}x + zx(2y+z+x)\,\mathrm{d}y + xy(2z+x+y)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_i^f \mathrm{d}[xyz(x+y+z)]\end{aligned} \tag{2.7}$$

仅与初态 $i$ 和末态 $f$ 有关，因此 $\boldsymbol{v}$ 为有势场，其势函数为

$$\varphi(x,y,z) = xyz(x+y+z) + C. \tag{2.8}$$

4. 当 $a$ 取何值时，向量场 $\boldsymbol{F} = (x^2+5ay+3yz)\boldsymbol{i} + (5x+3axz-2)\boldsymbol{j} + [(a+2)xy-4z]\,\mathrm{d}z$ 是有势场，并求出这时的势函数.

**解** 已知对于某一（些）$a$ 的取值，$\boldsymbol{F}$ 必然为有势场，因此仅考虑 $\boldsymbol{F}$ 旋度的 $x$ 分量：

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})_x = (a+2)x - 3ax = 2(1-a)x = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = 1. \tag{2.9}$$

当 $a=1$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int (x^2+5y+3yz)\,\mathrm{d}x + (5x+3zx-2)\,\mathrm{d}y + (3xy-4z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2 + C.\end{aligned} \tag{2.10}$$

5. 求下列全微分的原函数 $u$.

(2) $\mathrm{d}u = (x^2-2yz)\,\mathrm{d}x + (y^2-2zx)\,\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$.

**解** 对 $\mathrm{d}x$ 积分，可得

$$u(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - 2xyz + f(y,z) \quad\Longrightarrow\quad u_y = f_y - 2zx = y^2 - 2zx, \tag{2.11}$$

因此 $f(y,z) = y^3/3 + g(z)$，代入得

$$u(x,y,z) = \frac{x^3+y^3}{3} - 2xyz + g(z) \quad\Longrightarrow\quad u_z = g' - 2xy = z^2 - 2xy, \tag{2.12}$$

因此 $g(z) = z^3/3 + C$，代入得

$$u(x,y,z) = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz + C. \tag{2.13}$$

6. 验证下列积分与路径无关，并求出它们的值.

(5) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z.$

**解** 容易看出微分式为以下势函数的全微分：

$$\varphi(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C, \tag{2.14}$$

因此该积分值与路径无关、仅与初末态有关，即

$$\text{原式} = \varphi(2,2,2) - \varphi(1,1,1) = 3 - 1 = 2. \tag{2.15}$$

(6) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上.

**解** 容易看出微分式为以下势函数的全微分：

$$\varphi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C, \tag{2.16}$$

因此该积分值与路径无关、仅与初末态有关，即

$$\text{原式}=\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)=|a|-|a|=0. \tag{2.17}$$

10. 已知 $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=2$, $\beta(0)=2$.

(1) 求 $\alpha(x),\beta(x)$ 使线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路线无关，其中

$$P(x,y)=(2x\alpha'(x)+\beta(x))y^2-2y\beta(x)\tan 2x, \tag{2.18}$$

$$Q(x,y)=(\alpha'(x)+4x\alpha(x))y+\beta(x). \tag{2.19}$$

(2) 求 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$.

**解** (1) 由题意，选择任一闭区域 $D$，采用 Green 公式：

$$\begin{aligned}0=\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&=\iint_D (Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D[(\alpha''+4\alpha-2\beta)y+(\beta'+2\beta\tan 2x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned} \tag{2.20}$$

由于区域 $D$ 选择任意，要求被积函数对 $\forall x,y\in D$ 恒为零，从而

$$\begin{cases}\alpha''+4\alpha-2\beta=0,\\ \beta'+2\beta\tan 2x=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta}=-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{\cos 2x}. \tag{2.21}$$

利用定解条件 $\beta(0)=2$，解得 $\beta(x)=2\cos 2x$，将其代入第一个方程，可得

$$\alpha''+4\alpha=4\cos 2x\quad\Longrightarrow\quad \text{通解：}\begin{cases}\alpha_1(x)=\cos 2x,\\ \alpha_2(x)=\sin 2x,\end{cases}, \tag{2.22}$$

因此方程的 Wronski 行列式为

$$w(x)=\begin{vmatrix}\alpha_1(x) & \alpha_2(x)\\ \alpha_1'(x) & \alpha_2'(x)\end{vmatrix}=2, \tag{2.23}$$

其特解为

$$\begin{aligned}\alpha^*(x)&=\int\frac{f(u)}{w(u)}\begin{vmatrix}\alpha_1(u) & \alpha_2(u)\\ \alpha_1(x) & \alpha_2(x)\end{vmatrix}\mathrm{d}u=2\int\cos 2u\cdot\sin 2(x-u)\,\mathrm{d}u\\&=\int[\sin 2x+\sin 2(x-2u)]\,\mathrm{d}u=x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x,\end{aligned} \tag{2.24}$$

因此方程的特解为

$$\alpha(x)=A\cos 2x+B\sin 2x+x\sin 2x\quad\xrightarrow[\alpha'(0)=2]{\alpha(0)=0}\quad\alpha(x)=(x+1)\sin 2x. \tag{2.25}$$

(2) 这一小问实际上可以绕过上一小问需要计算的 $\alpha, \beta$. 由题意，该积分值与路径无关，因此取从 $(0,0)$ 到 $(0,2)$ 的直线段，则有

$$\text{原式} = \int_0^2 Q(0,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 [\alpha'(0)y + \beta(0)]\,\mathrm{d}y = 2\int_0^2 (y+1)\,\mathrm{d}y = 8. \tag{2.26}$$

13. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0,\ f'(0)=2$，且

$$(\mathrm{e}^x \sin y + x^2 y + f(x)y)\,\mathrm{d}x + (f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.27}$$

为一全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

**解** 由题意，该全微分方程可写为 $\mathrm{d}F = 0$，$F(x,y,z)$ 即该方程的通解. 利用二阶混合偏导次序可交换，可得

$$\begin{aligned} 0 = F_{yx} - F_{xy} &= (f'(x) + \mathrm{e}^x \cos y + 2x)_x - (\mathrm{e}^x \sin y + x^2 y + f(x)y)_y \\ &= f''(x) - f(x) - (x^2 - 2). \end{aligned} \tag{2.28}$$

该方程的通解为 $A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$，特解为 $-x^2$，代入定解条件得

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - x^2, \tag{2.29}$$

从而全微分方程的通解为

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= F(0,0,0) + \int_0^x F_x(u,0)\,\mathrm{d}u + \int_0^y F_y(x,v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}u + \int_0^y (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \cos v)\,\mathrm{d}v + C \\ &= (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})y + \mathrm{e}^x \sin y + C. \end{aligned} \tag{2.30}$$

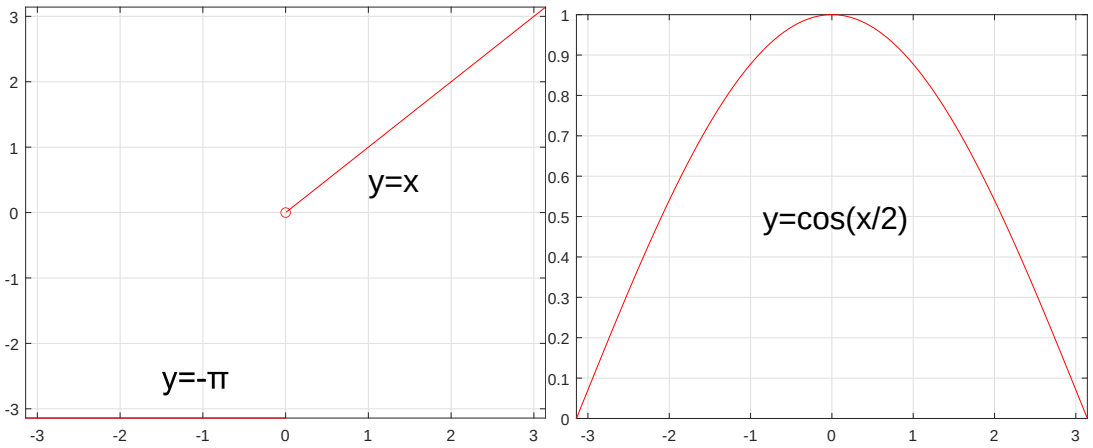
## 3 Exercise 12.1

1. 作出下列周期 $2\pi$ 的函数的图形，并把它们展开成 Fourier 级数（收敛情况）.

   (1) 在 $[-\pi,\pi)$ 中，$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant\pi\leqslant 0,\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

   (2) 在 $[-\pi,\pi)$ 中，$f(x)=\cos(x/2)$.

   解 题中给出的函数图像如下图所示.




   (1) 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上分段可微，由 Dirichlet 定理，可将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上作 Fourier 展开，对应系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\pi\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}a_n&=-\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}b_n&=-\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1-(-1)^n}{n}-\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1-2(-1)^n}{n},\end{aligned} \tag{3.3}$$

   因此

$$-\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx-\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right]=\begin{cases}-\pi/2, & x=0,\\ 0, & x=-\pi,\\ f(x), & \text{elsewhere.}\end{cases} \tag{3.4}$$

   (2) 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上具有一阶连续导数，且 $f(x)$ 为偶函数，由 Dirichlet 定理，$f(x)$

在 $[-\pi,\pi)$ 上作 Fourier 展开时的系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n-1/2}+\frac{(-1)^n}{n+1/2}\right]=\frac{(-1)^{n-1}}{(n^2-1/4)\pi},\end{aligned}\tag{3.6}$$

同时 $b_n=0$，因此

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx\right),\quad x\in[-\pi,\pi).\tag{3.7}$$

4. 已知函数的 Fourier 展开式，求常数 $a$ 的值.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=a(2a-|x|)$，其中 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

**解** 由于函数的 Fourier 级数收敛于其自身，分别计算 $x=0$ 和 $\pi$ 处的函数值：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=2a^2,\\[2ex]\displaystyle-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=a(2a-\pi)\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad a(4a-\pi)=0\quad\Longrightarrow\quad a=\frac{\pi}{4}.\tag{3.8}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=ax$，其中 $-\pi<x<\pi$.

**解** 将 $ax$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上作 Fourier 展开，其系数 $a_n=0\ (n\in\mathbb{N})$ 且

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2a}{n\pi}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{2(-1)^{n-1}}{n}a=\frac{(-1)^n}{n},\end{aligned}\tag{3.9}$$

解得 $a=1/2$.

6. 设 $f(x)$ 是一个以 $2\pi$ 为周期的函数.

(1) 如果 $f(x\pm\pi)=-f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有奇次谐波，即

$$a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots),\quad b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots).\tag{3.10}$$

(2) 如果 $f(x\pm\pi)=f(x)$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有偶次谐波，即

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\quad(n=1,2,\cdots).\tag{3.11}$$

**证明.** (1) 由题意，

$$\begin{aligned}a_{2n}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x\pm\pi)\cos 2n(x\pm\pi)\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{以 + 为例}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{周期性}}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=-a_{2n},\end{aligned}\tag{3.12}$$

因此 $a_{2n}=0\ (n\in\mathbb{N})$，$b_{2n}$ 类似.

(2) 由题意，

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\pm\pi)\cdot[-\cos(2n-1)(x\pm\pi)]\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{以 + 为例}} -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{周期性}} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x = -a_{2n-1}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此 $a_{2n-1}=0\ (n=1,2,\cdots)$，$b_{2n-1}$ 类似.

7. 已知周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数是 $a_n$ 和 $b_n$，试证明“平移”了的函数 $f(x+h)$ ($h=$ 常数) 的 Fourier 系数是

$$\bar{a}_n = a_n\cos nh + b_n\sin nh \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{3.14}$$

$$\bar{b}_n = b_n\cos nh - a_n\sin nh \quad (n=1,2,\cdots). \tag{3.15}$$

**证明.** 利用 $f(x)$ 的周期性，

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x+h)\cos n(x+h-h)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos nh\cdot f(x)\cos nx + \sin nh\cdot f(x)\sin nx]\,\mathrm{d}x \\ &= a_n\cos nh + b_n\sin nh, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\bar{b}_n$ 类似.

8. 将 $y=1-x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数，并利用其结果求下列级数的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

**解** 由于 $y$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一阶连续可微，且 $y$ 为偶函数，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 展开系数为

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right), \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left[(1-x^2)\sin nx\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

且 $b_n=0$，因此

$$f(x) = 1-\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx, \quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{3.19}$$

(1) 容易计算

$$f(0)=1-\frac{\pi^3}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{3.20}$$

(2) 由 Parseval 等式，

$$2\Big(1-\frac{\pi^2}{3}\Big)^2+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x=2\Big(1-\frac{2\pi^2}{3}+\frac{\pi^4}{5}\Big), \tag{3.21}$$

从中解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{3.22}$$