第六周作业

邓嘉驹

更新：July 21, 2025

1 Exercise 9.5

1. (9.5.5) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，当 $x=y=1$ 时 $z=1$，试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 至二次项为止.

   解 记方程 $F(x,y,z)=z^3-2xz+y=0$，则

$$z_x(1,1)=-\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{2z}{3z^2-2x}\right|_{(1,1)}=2, \tag{1.1}$$

$$z_y(1,1)=-\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{(1,1)}=-\left.\frac{1}{3z^2-2x}\right|_{(1,1)}=-1, \tag{1.2}$$

   进而二阶导

$$z_{xx}(1,1)=2\left.\frac{2z-(3z^2+2x)z_x}{(3z^2-2x)^2}\right|_{(1,1)}=-16, \tag{1.3}$$

$$z_{xy}(1,1)=\left.\partial_x z_y\right|_{(1,1)}=\left.\frac{6zz_x-2}{(3z^2-2x)^2}\right|_{(1,1)}=10, \tag{1.4}$$

$$z_{yy}(1,1)=\left.\frac{6zz_y}{(3z^2-2x)^2}\right|_{(1,1)}=-6, \tag{1.5}$$

   因此 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 附近展开的结果为

$$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(x^2+y^2). \tag{1.6}$$

2. [9.5.10 (3)] 求函数 $u=\sin x\sin y\sin z$ 在条件 $x+y+z=\pi/2$ 且 $x,y,z>0$ 条件下的极值.

   解 代入 $z=\pi/2-x-y$，则待研究函数与条件分别变为

$$z=\sin x\sin y\cos(x+y),\quad \begin{cases} x,y>0,\\ 0<x+y<\pi/2. \end{cases} \tag{1.7}$$

   极值点的必要条件：

$$z_x=\sin y[\cos x\cos(x+y)-\sin x\sin(x+y)]=\sin y\cos(2x+y)=0, \tag{1.8}$$

$$z_y=\sin x\cos(2y+x)=0. \tag{1.9}$$

注意到 $0 < x, y < \pi/2$ 且 $0 < 2x + y, 2y + x < \pi$，上述方程组的唯一解为

$$2x + y = 2y + x = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = y = \frac{\pi}{6} = z, \tag{1.10}$$

即可疑点 $P_0(\pi/6, \pi/6)$. 进一步计算二阶导：

$$A = z_{xx}(P_0) = -2\sin y \sin(2x + y)\Big|_{P_0} = -1 = C < 0, \tag{1.11}$$

$$B = z_{xy}(P_0) = \cos(2x + 2y)\Big|_{P_0} = -\frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

可见 $AC - B^2 = 3/4 > 0$ 且 $A < 0$，函数 u 在 $P_0(\pi/6, \pi/6)$ 处取极大值，不存在极小值.

3. 从平行六面体一点出发，指向其相邻三个顶点产生的向量分别记为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$，其模长分别为 x, y, z，由题意 $x + y + z = 3a$，那么平行六面体的体积

$$V = |(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}| \leqslant xyz \leqslant \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3 = a^3, \tag{1.13}$$

前后等号成立依次要求 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 相互正交和 $x = y = z$，即 $V = V_{\max} = a^3$ 时其为正方体.

2 Exercise 10.1

1. (10.1.1) 改变下列积分的顺序.

(a). $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, f(x, y).$

解 积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$，因此

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

(b). $\displaystyle\int_{0}^{a} \mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x\, f(x, y).$

解 积分区域 $D = \{(x, y) | (x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2, y \geqslant 0\}$，因此

$$\int_{0}^{a} \mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

(c). 积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2y \leqslant x, y \leqslant 2 - x\}$，因此

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{x} \mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{2-x} \mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{2-y} \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

2. (10.1.2) 计算下列积分.

(a). $\displaystyle\iint_D \frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$, $D = [0, 1]^2$.

解 注意到 $y\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(y^2\right)/2$，先对 y 积分：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\bigg|_{y=0}^{y=1}=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal[a=1\text{ or }\sqrt{2}]{x=a\sinh t}\operatorname{arcsinh}1-\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}},\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中已利用 $\cosh^2t-\sinh^2t=1$ 以及

$$x=\sinh y=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\quad\Longrightarrow\quad y=\operatorname{arcsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\tag{2.5}$$

(b). $\iint_D\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D=[0,\pi]^2$.

解 由题意，

$$\text{原式}=\int_0^\pi\mathrm{d}x\cdot\left[-\cos(x+y)\right]\Big|_{y=0}^{y=\pi}=2\int_0^\pi\cos x\,\mathrm{d}x=0.\tag{2.6}$$

(c). $\iint_D(x+y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x,y=x+a,y=a,y=3a$ 围成.

解 应尽可能避免将积分区间分段处理，做出图像可知依次对 x,y 积分更易于计算：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x+y-1)\,\mathrm{d}x=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\cdot\frac{1}{2}(x+y-1)^2\Big|_{x=y-a}^{x=y}\\&=\frac{a}{2}\int_a^{3a}(4y-a-2)\,\mathrm{d}y=a^2(7a-2).\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中已假定 $a>0$，$a<0$ 时处理方法类似，此处从略.

(d). $\iint_D\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x$ 及 $x=y^2$ 围成.

解 曲线交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$. 由于 $\sin y/y$ 的原函数不存在初等函数表示，因此必然先对 x 积分：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{d}x\,\frac{\sin y}{y}=\int_0^1(1-y)\sin y\,\mathrm{d}y\\&=-\left(1-y\right)\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos y\,\mathrm{d}y=1-\sin1.\end{aligned}\tag{2.8}$$

(e). $\iint_D\left|\cos(x+y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $y=x,y=0,x=\pi/2$ 围成.

解 利用直线 $l:x+y=\pi/2$ 将 D 分割成左下的 D_1 和右上的 D_2，则 $\cos(x+y)$ 在 D_1 内恒正，在 D_2 内恒负. 注意到积分区域 D_1,D_2 和被积函数均关于 l 对称，即考虑变换 $S:(x,y)\to(\pi/2-y,\pi/2-x)$：

$$\begin{aligned}&D_1=\{(x,y)|y\leqslant x,y\geqslant0,x+y\leqslant\pi/2\}\\\xrightarrow{S}&\{(x,y)|y\leqslant x,x\leqslant\pi/2,x+y\geqslant\pi/2\}=D_2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\left|\cos(x+y)\right|\xrightarrow{S}\left|\cos(\pi-y-x)\right|=\left|\cos(x+y)\right|,\tag{2.10}$$

故原积分在 D_1 和 D_2 内的积分值相同，那么

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\iint_{D_1} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}y\int_y^{\pi/2-y}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\pi/4}[1-\sin(2y)]\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}-1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. (10.1.4) 设函数 φ 和 ψ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积，求证 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d \psi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.12}$$

证明. 依照 10.1.3 小节的分割，由分解所得函数 φ,ψ 的可积性（Riemann 和的极限存在）证明总极限存在即可.