积分专题复习

邓嘉驹

更新：January 13, 2024

通常来说，单变量积分是数学分析 B1 课程的一个难点，不仅是直接的积分计算有难度，还有利用积分定理（如第一、第二积分中值定理）构造函数进行证明、积分值作为级数各项考虑其收敛性等题型. 不过近年试题中并未出现过或方法或结果复杂的不定积分积分计算题[1]，本篇会更着眼于考试中出现的题型，尽可能覆盖所有需要的技巧. 至于证明类题[2]，考试中不会出现单独考察利用积分定理的构造证明（和微分学考察微分中值定理不一样），而结合其他知识点出现时会放在该知识点的讲义中进行讲解. 那么，我们开始吧.

1 不定积分

1.1 要点与技巧

1. 不定积分的结果别忘了待上积分常数 C.
2. 换元法常用微分关系[3]：

$$\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\,,\quad \frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}(\ln x)\,, \tag{1}$$

$$\sin x\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}(\cos x)\,,\quad \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)\,, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{d}(\tan x)\,,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\,\mathrm{d}(\cot x)\,, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}(\arctan x)\,,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}(\arcsin x)\,. \tag{4}$$

更一般地，x 可换为任一变量或函数，有如上形式的表达式均可作如此微分变换，如

$$\frac{1}{1+(\arctan x)^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{1+(\arctan x)^2}=\mathrm{d}(\arctan(\arctan x))\,. \tag{5}$$

3. 换元法技巧：

[1] 之前也和一位带这门课的助教聊过，他说一般考试并不会考察尤其是结果复杂的不定积分，因为不同的变量代换可能会导向不同的积分方法，从而最终结果形式相差甚远，判卷时很费时费力，所以一般考试出题会避免. 当然因为定积分结果就是一个数值，是可以出难一些的

[2] 积分变换类的证明题仍算作积分计算，如 2018-2019 年期末第 4 题

[3] 实际上严格结果为 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$，但计算中绝对值很难处理，通常默认 $x>0$，仅在结果上加绝对值

(a). 原则上只要碰到反三角函数，都可以将其整体作变量代换，以消去对表达式作分部积分或分离等操作时不容易看出性质的反三角函数. 当然形式非常明显的如 $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 可省略代换这一步.

(b). 三角函数、反三角函数作用的表达式原则上都可以作整体变量代换，如 $\sin\dfrac{1}{x}$ 中可令 $u=1/x$，以便将其化为容易分析性质的三角函数或为上一条提到的变量代换做准备.

(c). 牢记三角恒等式 $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$，这一公式常用于配三角函数有理式：

$$\mathrm{d}x=\cos^2 x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+\tan^2 x} \tag{6}$$

以及常见平方和差结构的换元 $(a>0)$：

$$x^2+a^2 \quad\longrightarrow\quad x=a\sinh t \text{ 或 } x=a\tan t, \tag{7}$$

$$x^2-a^2 \quad\longrightarrow\quad x=a\cosh t \text{ 或 } x=\frac{a}{\cos t}, \tag{8}$$

$$a^2-x^2 \quad\longrightarrow\quad x=a\sin t. \tag{9}$$

(d). 若根号内的表达式为分式线性函数[4]或形如 $\mathrm{e}^x-1,\ln x,\tan x$ 的单调函数，可将表达式带根号整体换元，如 $\sqrt[3]{2x+1}=u$，则 $x=(u^3-1)/2$. 若 x 的次数为不小于 3 的奇数或既约分数，通常会两步换元——先令 $t=x^n$，再令 u 为带根号的整体表达式，如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\xlongequal{t=\sqrt{x}}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1}}\xlongequal{u=\sqrt{t+1}}\frac{2(u^2-1)}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u\,. \tag{10}$$

4. 分部积分法技巧：考试中常见形式为有理函数与作用在 x（而非含 x 的表达式）上的指数函数、对数函数、（反）三角函数的乘积，特征较明显，所以这类题的关键在于分辨其结构. 通常来说，若为对数函数和反三角函数则先对有理函数积分，若为指数函数和三角函数则先对指数函数或三角函数积分.

5. 有理函数积分技巧：

(a). 首先需要比较分母与分子的次数，将有理分式拆分为整式和分式.

(b). 拆解分式的基本原则是能用直接看出来的分解方法就用，比如将用如下几种快速拆解的方法组合，待定系数法永远是下下策.

(c). 最简单的形式为分母的多项式可在实数域上因式分解若干形如 (x^n+a)（各项次数 n 相同）的多项式，如

$$\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-4x^2+5x-2}&=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\\&=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{(x-1)^2},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{1}{x^4+5x^2+6}=\frac{1}{(x^2+2)(x^2+3)}=\frac{1}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+3}. \tag{13}$$

(d). 若分母含 x^n 项且 n 不低于剩余分解因式的最高次数，则可利用此项进行上一条提到的配项操作.

[4]指形式为 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a^2+c^2\neq 0)$ 的有理分式

(e). 对于 $k>-2$，牢记如下形式的分解：

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{4n}-kx^2+1}&=\frac{1}{(x^{2n}+1)^2-(k+2)x^{2n}}\\&=\frac{1}{\left(x^{2n}+\sqrt{k+2}x^n+1\right)\left(x^{2n}-\sqrt{k+2}x^n+1\right)}.\end{aligned}\tag{14}$$

(f). 对于三角函数有理分式，视 $\sin x,\cos x$ 为同次，则视 $\tan x$ 为常数时，若每一含正弦或余弦的项内各项次数只差偶数次（如 $1+\cos^2 x+\sin^4 x\tan x$，而 $1+\sin x$ 则不满足），则可比较分母与分子的次数差. 若差偶数次，则可利用三角恒等式 $1/\cos^2 x=1+\tan^2 x$ 以及 $\mathrm{d}x/\cos^2 x=\mathrm{d}(\tan x)$ 将其化为关于 $\tan x$ 的有理分式，作换元 $u=\tan x$ 后化为有理分式积分，如

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^2 x}&=\int\frac{1/\cos^2 x}{1+\tan^2 x(1/\cos^2 x)}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\\&\xlongequal{u=\tan x}\int\frac{1+u^2}{1+u^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}\tag{15}$$

若差奇数次，则将提供奇数次项的因子并入微分，再将微分表达式换元，如

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}(\cos x)\xlongequal{u=\cos x}\frac{u^2-1}{u^4+(1-u^2)}\,\mathrm{d}u\,.\tag{16}$$

(g). 若三角函数有理分式不满足上一条的条件，则考虑将其化为 $\sin x,\cos x$ 之一的有理分式. 除此之外，还有下下策，即利用万能公式

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.\tag{17}$$

将表达式换为关于 t 的有理分式，其中 $t=\tan(x/2)$.

1.2 习题讲解

1.2.1 换元法计算不定积分

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}.$
9. $\displaystyle\int\frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x.$
11. $\displaystyle\int\sqrt{\mathrm{e}^x-2}\,\mathrm{d}x.$
12. $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$
13. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}}.$
14. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$
15. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$
16. $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解 1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x = \int [(\mathrm{e}^{x})^2 - (\mathrm{e}^{x}) + 1]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + x + C.$

2. $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\tan x + x) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+\sin x+\cos x)}{1+\sin x+\cos x} = \ln|1+\sin x+\cos x| + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$

7. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\arctan(1/x)}{1+(1/x)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2 + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+x\ln x)}{1+\ln x} = \ln|1+x\ln x| + C.$

11. 令 $u = \sqrt{\mathrm{e}^{x}-2}$，则 $x = \ln(u^2+2)$，从而

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\mathrm{e}^{x}-2}\,\mathrm{d}x &= \int u\cdot\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+2} = 2\int\left(1-\frac{2}{u^2+2}\right)\mathrm{d}u\\ &= 2u - 2\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C\\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}-2} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}-1} + C.\end{aligned}\tag{18}$$

12. 令 $x = a\sinh t$，则 $t = \operatorname{arcsinh}(x/a)$，从而

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \int a\cosh t\cdot a\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2\int\frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{4}(2t+\sinh 2t) + C = \frac{a^2}{2}\left(t+\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left[a^2\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) + x\sqrt{x^2+a^2}\right] + C.\end{aligned}\tag{19}$$

13. 令 $x = a/cost$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}} &= \int \frac{1}{a^3\tan^3 t}\left(-\frac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}\right) = -\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^3 t}\\ &= \frac{1}{2a^2\sin^2 t} + C = \frac{x^2}{2a^2(x^2-a^2)} + C.\end{aligned}\tag{20}$$

14. 令 $x = a\sin t$，则 $t = \arcsin(x/a)$，从而

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} - x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.\end{aligned}\tag{21}$$

15. 令 $u=\sqrt{x+1}$，则 $x=u^2-1$，从而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}=\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2(u-\ln|1+u|)+C=2\left(\sqrt{1+x}-\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|\right)+C. \tag{22}$$

16. 令 $u=\sqrt[3]{2x+1}$，则 $x=(u^3-1)/2$，从而

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{(u^3-1)/2+2}{u}\cdot\frac{3}{2}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{3}{4}\int(u^4+3u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{3}{20}(2x+1)^{5/3}+\frac{9}{8}(2x+1)^{2/3}+C.\end{aligned} \tag{23}$$

1.2.2 分部积分法计算不定积分

1. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.
2. $\int x^2\cos 5x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解 1. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$.

2. 对三角函数积分：

$$\begin{aligned}\int x^2\cos 5x\,\mathrm{d}x&=\frac{x^2}{5}\sin 5x-\frac{2}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{5}\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x-\frac{2}{25}\int\cos 5x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{125}[(25x^2-2)\sin 5x+10x\cos 5x]+C.\end{aligned} \tag{24}$$

3. $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^2-2x)\mathrm{e}^x+2\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+C$.

4. 对有理函数积分后换元：

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x&=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\sin t}\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}(t-\sin t\cos t)+C\\&=\frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right]+C.\end{aligned} \tag{25}$$

1.2.3 有理函数或三角函数有理式的不定积分

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.
2. $\int\frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\,\mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$
10. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$
11. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$
12. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$
13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+\sin 2x}.$
14. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x\ \ (a^2+b^2\neq 0).$

解 1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)}=\int\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=x+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|+C.$

4. 逐项拆解：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}&=\int \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan x+C\\&=-\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{2}\arctan x+C.\end{aligned}\tag{26}$$

5. 将分母拆解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{x(x^4-1)}{(x^4-\sqrt{2}x^2+1)(x^4+\sqrt{2}x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int x\left(\frac{\sqrt{2}x^2-1}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}-\frac{\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int \frac{\mathrm{d}\left(x^4-\sqrt{2}x^2+1\right)}{x^4-\sqrt{2}x^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}\left(x^4+\sqrt{2}x^2+1\right)}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right|+C.\end{aligned}\tag{27}$$

6. 先将其拆解为关于 (x^8+1) 的整式 + 分式的形式：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{x^7}{x^8+1}-\frac{x^7}{(x^8+1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}\ln(x^8+1)+\frac{1}{8}\frac{1}{x^8+1}+C.\end{aligned}\tag{28}$$

7. 非奇次也非偶次甚至非齐次，利用二倍角公式后可化为偶次：

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x=2u}\int \frac{(\cos u+\sin u)^2}{2\sin u\cos u\cdot 2\cos^2 u}\cdot 2\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int \frac{(1+\tan u)^2}{\tan u}\,\mathrm{d}\tan u\\&=\frac{1}{4}\left(\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)+C.\end{aligned}\tag{29}$$

8. 可化为关于 $\cos x$ 的多项式：

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos x}\,\mathrm{d}\cos x = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \cos^2 x - \ln|\cos x| + C. \tag{30}$$

9. 偶次，因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^2 x}{(1+\tan x)(1+\tan^2 x)^2}\,\mathrm{d}\tan x \\
&\xlongequal{u=\tan x} \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{u+1} - \frac{u-1}{u^2+1} + 2\frac{u-1}{(u^2+1)^2}\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{8}\ln(1+u^2) + \frac{\arctan u}{4} - \frac{1}{4(u^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{8}\ln(\sin x + \cos x)^2 + \frac{x}{4} - \frac{\cos^2 x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}[2\ln|\sin x + \cos x| - (\sin 2x + \cos 2x)] + C.
\end{aligned} \tag{31}$$

10. 奇次，但正弦和余弦均提供奇次，因此用万能公式换元：$t = \tan(x/2)$，可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2t(1-t^2)}{1+2t-t^2}\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4\int \frac{t(t^2-1)\,\mathrm{d}t}{(t^2-2t-1)(t^2+1)^2} \\
&= \int \left[-\frac{1}{t^2+1} + 2\frac{t+1}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2-2t-1}\right]\mathrm{d}t \\
&= -\arctan t - \frac{1}{t^2+1} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2} \\
&= -\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| \\
&= \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}}{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}\right| + C.
\end{aligned} \tag{32}$$

11. 偶次，因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+(1+\cot^2 x)}\frac{-\mathrm{d}\cot x}{1+\cot^2 x} \\
&= \int \left(\frac{1}{2+\cot^2 x} - \frac{1}{1+\cot^2 x}\right)\mathrm{d}\cot x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctan\,cot} x + C \\
&= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) + C'.
\end{aligned} \tag{33}$$

12. 非奇次也非偶次甚至非齐次，利用二倍角公式后可化为偶次：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+\sin 2x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{8\sin(x/2)\cos^3(x/2)}\\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)\cos^3(x/2)} \xlongequal{u=\cos(x/2)} -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)u^3}\\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)+\frac{1}{u^3}\right]\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{8}\ln\frac{u^2}{1-u^2}+\frac{1}{8u^2}+C = \frac{1}{8\cos^2(x/2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C. \end{aligned} \tag{34}$$

13. 偶次，因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{(b+a\tan x)(1+\tan^2 x)} \xlongequal{u=\tan x} \int \frac{\mathrm{d}u}{(b+au)(1+u^2)}\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\int\left(\frac{a^2}{b+au}+\frac{b-au}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\ln|b+au|+b\arctan u-\frac{a}{2}\ln\left|1+u^2\right|\right]+C\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}[a\ln|b+a\tan x|+bx+a\ln|\cos x|]+C\\ &= \frac{a\ln|a\sin x+b\cos x|+bx}{a^2+b^2}+C. \end{aligned} \tag{35}$$

1.2.4 综合练习

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^6}$.
4. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\tan x)\sin^2 x}$.
6. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
7. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$.
10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

解 1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int \frac{-\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+C.$

2. 注意到分母是 $x^{4n}-kx^{2n}+1$ 的类型，因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{x-1/2}{(x-1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}-\frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C. \end{aligned} \tag{36}$$

3. 原积分为：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^6} &= \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x + C. \end{aligned} \tag{37}$$

4. 注意到根号内为形如 e^x 的单调函数，因此带根号整体代换：$u=\sqrt{\mathrm{e}^x-2}$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{(u^2+2)\ln(u^2+2)}{u}\cdot\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+2} \\ &= 2\int \ln(u^2+2)\,\mathrm{d}u = 2u\ln(u^2+2) - 4\int \frac{u^2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u\ln(u^2+2) - 4\left(u-\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C \\ &= 2(x-2)\sqrt{\mathrm{e}^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{2}-1}+C. \end{aligned} \tag{38}$$

5. 偶次，因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\tan x)\sin^2 x} = \int \frac{\cot x}{1+\cot x}\cdot[-\mathrm{d}(\cot x)] = \ln|1+\cot x| - \cot x + C. \tag{39}$$

6. 注意到根号内为分式线性函数，因此带根号整体代换：$u=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$，则

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \int u\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2\cdot\frac{4u\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2} = 4\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\ &\xlongequal{u=\tan t} 4\int \frac{\tan^2 t}{1/\cos^4 t}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = 4\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 2(t-\sin t\cos t)+C = 2\left(\arctan u - \frac{u}{1+u^2}\right)+C \\ &= 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C. \end{aligned} \tag{40}$$

7. 由积化和差公式，

$$\cos x\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x+\cos 2x-1), \tag{41}$$

因此

$$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2\cos^3 2x+\cos^2 2x-\cos 2x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{42}$$

再利用二倍角公式和三倍角公式[5]降次扩角：

$$\begin{aligned}\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int (3\cos 2x+\cos 6x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\sin 2x \\ &= \frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C. \end{aligned} \tag{43}$$

[5]余弦的三倍角公式为 $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

8. 偶次，因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x} &= \int \frac{(1+\tan^2 x)^2}{1+\tan^4 x}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+\tan^2 x}\\ &\xlongequal{u=\tan x} \int \frac{1+u^2}{(1-\sqrt{2}u+u^2)(1+\sqrt{2}u+u^2)}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(1/\sqrt{2})^2+(u-1/\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2+(u+1/\sqrt{2})^2}\right]\mathrm{d}u\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)\right]+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}\tag{44}$$

9. 注意到根号内为单调函数，因此带根号整体代换：$u=\sqrt{\sqrt{x}+1}$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} &= \int \frac{1}{u}\cdot 2u(u^2-1)\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^3-2u+C\\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2}-2\sqrt{\sqrt{x}+1}+C\\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{\sqrt{x}+1}+C.\end{aligned}\tag{45}$$

10. 先将 $\sqrt{x}$ 整体代换为 t：

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(1-t^3\right)}{\sqrt{1-t^3}}\\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x^{3/2}}+C.\end{aligned}\tag{46}$$

2 定积分

2.1 要点与技巧

1. 积分的重要性质：

   (a). 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. 特别地，若两者积分值相等，则 $f(x)\equiv g(x)$.

   (b). I. 积分第一中值定理：若 $f(x)\in \mathbf{C}[a,b]$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

   II. 积分第二中值定理：若 $f(x),g(x)\in\mathbf{C}[a,b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.\tag{47}$$

   (c). $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

   (d). 对于连续的 $f(x)$，积分值 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $f(x)$ 为奇函数时取 0，在 $f(x)$ 为偶函数时取 $2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(e). 在 $\mathbb{R}$ 上连续且周期为 T 的函数 $f(x)$，满足

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

2. 变上限积分求导：

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)). \tag{49}$$

考试中也可能会碰到 $f(t)$ 中含变量 x 的情况，即 $f(t)$ 实际上应当写成 $f(x,t)$. 在数学分析 B2 的含参变量的积分的章节中，我们会学习如下求导公式：

$$\begin{aligned} &F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow &F'(x) = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{50}$$

如果了解的话直接用应该没什么问题（改卷助教肯定知道），而考虑到出题难度，现阶段我们还可以采取的技巧是将含 x 的项整体换元成 u，将 x 并入微分变量，从而能从积分表达式中提出，如

$$\int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y \xlongequal{u=xy} \int_0^x f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\,, \tag{51}$$

从而化为我们能直接求导的形式.

3. 往年题常考变上限积分的极限，其中一种形式是“可用 L'Hospital 法则化简”的形式，其基本思路就是通过该法则与变上限积分求导法则消去积分号，从而将问题转化为最开始学习的函数极限的计算. 有些题分母可先用等价无穷小换成 x^n 再求导，不能换的求导后通常有一部分可以代换，另一部分求极限时自动变为常数，如 $\cos^2 x$ 在 $x \to 0$ 时.
4. 往年题考察积分极限的另一种形式是“求和型极限”的形式，并且这类题通常用 Stolz 定理无法解决. 这时需要结合积分的 Riemann 和定义，先提出 $1/n$ 作为 $\mathrm{d}x$，然后将求和写成代数表达式的求和形式（带求和号的形式），通常出现的是 k/n 的形式，这样将 k/n 视为 x，通常 k 从 0 或 1 到 $(n-1)$ 或 n 求和，即积分上下限分别为 0 和 1. 在此基础上写下积分表达式，计算即可.
5. 对于难以求解原函数的定积分，要么是将其分段计算，要么一定会利用定积分与被积区间之间形成的某种对称性，常见的如

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(-x) = \cos x, \tag{52}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}, \tag{53}$$

以及习题中出现过的容易辨别但不多见的

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}, \quad \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x. \tag{54}$$

6. 几何量计算的根本公式：

(a). 弧长：弧元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{(\mathrm{d}\rho)^2+(\rho\mathrm{d}\varphi)^2}, \tag{55}$$

后者为极坐标系中的公式. 这两个关系都很容易从几何上看出来，并且不限于 y 能直接写成 x 的函数、ρ 能直接写成 φ 的函数，可以是两个变量关于某一参数 t 的表达式，如直角系下圆周方程可写为关于方位角 θ 的参数式：$\begin{cases}x(\theta)=R\cos\theta,\\ y(\theta)=R\sin\theta.\end{cases}$

(b). 平面图形面积：直角系下面元

$$\mathrm{d}A=y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y\,, \tag{56}$$

$y(x)$ 和 $x(y)$ 哪个形式简单且能保证自身一阶导的连续性通常用哪个，如 $|x|$ 从 $[-1,1]$ 上积分可用 $\int_0^1[y-(-y)]\,\mathrm{d}y=1$. 同样地，这里 x,y 可以是某个参数 t 的函数. 极坐标系下的面元 $\mathrm{d}A=\rho^2\mathrm{d}\varphi/2$（原点在边界上的平面图形）.

(c). 旋转体体积：弄清旋转轴，比如绕 x 轴旋转，那么旋转半径就是 $|y|$，将其细分成薄圆片，体积元为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\,\mathrm{d}x\,, \tag{57}$$

后续讨论同上.

(d). 旋转体侧面积：弄清旋转轴，并且这里分割后不能完全将其视为薄圆片，因为边界长度（第一条讨论过的弧长）$\mathrm{d}s$ 与薄圆片高 $\mathrm{d}x$ 为同阶小量，这意味着积分后数值有差异. 正确的侧面积元为[6]

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}[2\pi y+2\pi(y+\mathrm{d}y)]\mathrm{d}s=2\pi y\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}. \tag{58}$$

2.2 习题讲解

2.2.1 变上下限积分的导数计算

1. $\displaystyle\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+\cos^2 t}.$
3. $\displaystyle\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
4. $\displaystyle\sin\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right).$
5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为正值连续函数. 证明：当 $x>0$ 时，函数

$$G(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\Big/\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{59}$$

单调递增.

[6]中间消去了二阶小量 $\mathrm{d}y\mathrm{d}s$

解 1. $2x\cdot\sin x^4$.

2. $-\dfrac{1}{1+x^2+\cos^2 x}$.

3. $2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}$.

4. $\cos\left(\displaystyle\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\cdot\sin\left(\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)$.

5. 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)$，则

$$G'(x)=\frac{1}{F^2(x)}\left[xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right]\overset{\Delta}{=\!=}\frac{f(x)g(x)}{F^2(x)},\tag{60}$$

继续研究 $g(x)=x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ 的单调性：

$$g'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.\tag{61}$$

由于 $x>0$ 且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负，因此 $g'(x)\geqslant 0$，即 $g(x)$ 单调递增，因此 $g(x)\geqslant g(0)=0$，从而 $G'(x)\geqslant 0$，即 $G(x)$ 单调递增.

2.2.2 积分极限与求和型数列极限的计算

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3\,\mathrm{d}t$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$.

5. 设 $a_k=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)a+\dfrac{k}{n}b\ (0<a<b,k=1,2,\cdots,n)$，计算：

   (a). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.　　(b). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}\right]$.

解 1. 由 L'Hospital 法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}.\tag{62}$$

2. 由 L'Hospital 法则，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin\left(\tan^2 x\right)\cdot 1/\cos^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{63}$$

3. 这是求和型极限，因此向着 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ 的形式化简：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}}$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}. \tag{64}$$

4. 这是求和型极限，因此向着 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ 的形式化简：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}. \tag{65}$$

5. (a). 这是求和型极限，因此向着 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ 的形式化简：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[a+(b-a)\frac{k}{n}\right]=\int_0^1[a+(b-a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}. \tag{66}$$

(b). 为了将求积转化成求和，将待证表达式利用公式 $A=\mathrm{e}^{\ln A}$ $(A>0)$ 改写：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[a+(b-a)\frac{k}{n}\right]\right\}\\&=\exp\left\{\int_0^1\ln[a+(b-a)x]\,\mathrm{d}x\right\}\\&\xlongequal{u=a+(b-a)x}\exp\left[\frac{u(\ln u-1)}{b-a}\bigg|_a^b\right]\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}.\end{aligned} \tag{67}$$

6. 这里并没有直接的 k/n 因子，因此先进行放缩：

$$\frac{1}{n+1/k}<\frac{1}{n}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}, \tag{68}$$

$$\frac{1}{n+1/k}\geqslant\frac{1}{n+1}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}. \tag{69}$$

由夹逼准则，原积分极限为 $2/\pi$.

2.2.3 易求原函数定积分的计算

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}.$

解 1. 注意到根号内为形如 e^x 的单调函数，因此带根号整体代换：$u=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{3}/2} u\cdot\frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_0^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)-1\right]\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned} \tag{70}$$

2. 有理函数乘反三角型分部积分，因此先对有理函数积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{x=\sin t}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.\end{aligned} \tag{71}$$

3. 有理函数乘指数型分部积分，因此先对指数函数积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^3\mathrm{e}^x\Big|_0^1-3\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-3\,x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1+6\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= -2\mathrm{e}+6\,x\mathrm{e}^x\Big|_0^1-6\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}-6(\mathrm{e}-1) = 6-2\mathrm{e}.\end{aligned} \tag{72}$$

4. 出现 a^2-x^2 的结构，考虑三角换元 $x=a\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}} &= \int_0^{\pi/2}\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a(\sin t+\cos t)} = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{(1+\tan t)(1+\tan^2 t)}\\ &\xlongequal{u=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1-u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|1+u|+\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)\right]\Big|_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+u)^2}{1+u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned} \tag{73}$$

5. 注意到根号内为形如 e^x 的单调函数，因此带根号整体代换：$u=\sqrt{\tan x}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u\cdot\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 u\left(\frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left[\frac{(u-1/\sqrt{2})+1/\sqrt{2}}{(u-1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2}-\frac{(u+1/\sqrt{2})-1/\sqrt{2}}{(u+1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2}\right]\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)\right]\Bigg|_0^1\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\pi+2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right].\end{aligned}\tag{74}$$

6. 偶次，因此

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x++b^2\cos^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{b^2+a^2\tan^2 x}=\frac{1}{|ab|}\arctan\frac{|a|\tan x}{|b|}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2|ab|}.\tag{75}$$

2.2.4 难求原函数定积分的计算

1. $\displaystyle\int_{-3}^{4}[x]\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{|x|}\arctan\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

解 1. 当 $n\leqslant x<n+1$ 时 $[x]=n$，因此

$$\int_{-3}^{4}[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{n=-3}^{3}\int_n^{n+1}n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=-3}^{3}n=0.\tag{76}$$

2. 注意到区间是对称的，因此考虑被积函数是否存在奇（偶）对称性：

$$\cos(-x)\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\cos x\cdot\left(-\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=-\cos x\ln\frac{1+x}{1-x},\tag{77}$$

即被积函数为奇函数，因此原积分值为 0.

3. 注意到区间是对称的，因此考虑被积函数是否存在奇（偶）对称性：

$$\frac{\cos^3(-x)}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^x\cos^3 x}{1+\mathrm{e}^x},\tag{78}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x\cos^3 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}.\end{aligned}\tag{79}$$

4. 注意到区间是对称的，因此考虑被积函数是否存在奇（偶）对称性：

$$\mathrm{e}^{|-x|}\arctan \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{|x|}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan \mathrm{e}^{x}\right), \tag{80}$$

因此

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{|x|}\arctan \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{|x|}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-1). \tag{81}$$

2.2.5 几何量的计算（弧长、面积、体积）[7]

1. 计算弧长：
   (a). 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\leqslant t<2\pi, a>0)$.
   (b). Archimedes 螺线：$r=a\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.
2. 计算图线围成的平面图形的面积：
   (a). 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ $\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta<\frac{\pi}{4}\text{ 或}\frac{3\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\right)$.
   (b). $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 及 x 轴.
3. 计算旋转体体积：
   (a). $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴旋转一周.
   (b). 半径为 R、高为 h 的球缺.
4. 计算旋转体侧面积：
   (a). $y=a\cosh x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 x 轴.
   (b). $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 绕极轴.

解 1. (a). 弧长：

$$\begin{aligned}s(L)&=\int\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)}\,\mathrm{d}t\\&=3a\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=6a.\end{aligned} \tag{82}$$

(b). 弧长：

$$\begin{aligned}s(L)&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\theta=\sinh x}a\int_0^{x_0}\cosh^2 x\,\mathrm{d}x=a\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2x\right)\Big|_0^{\operatorname{arcsinh} 2\pi}\\&=\frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\operatorname{arcsinh} 2\pi\right)=a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{83}$$

[7]这一部分的内容貌似不会直接考，但对于空间解析几何与数学分析 B2 课程中的重积分的学习与理解很有帮助

2. (a). 平面图形面积：

$$A(D)=\int\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=a^2. \tag{84}$$

(b). 平面图形面积：

$$\begin{aligned}A(D)&=\int y\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}\cdot 2\pi=3\pi.\end{aligned} \tag{85}$$

3. (a). 旋转体体积：

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=\int\pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot(1-\cos t)\,\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{\cos 3t+\cos t}{4}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{5\pi}{2}\cdot 2\pi=5\pi^2.\end{aligned} \tag{86}$$

(b). 球缺任一轴截面方程可写为 $y(x)=\sqrt{R^2-x^2}\ (R-h\leqslant x\leqslant R)$，因此旋转体体积：

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=\int\pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left[R^2h-\frac{R^3-(R-h)^3}{3}\right]\\&=\frac{\pi}{3}\left[3R^2h-(3R^2h-3Rh^2+h^3)\right]=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).\end{aligned} \tag{87}$$

作为验证，若 $h=R$，则为半球面，其体积恰为 $V(\Omega)=2\pi R^3/3$.

4. (a). 旋转体侧面积：

$$\begin{aligned}S(\Omega)&=\int 2\pi y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^a a\cosh x\sqrt{1+a^2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=a\sinh x}2\pi\int_0^{a\sinh a}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{u=\sinh t}2\pi\int_0^{t_0}\cosh^2 t\,\mathrm{d}t=\pi(t_0+\sinh t_0\cosh t_0)\\&=\pi\left[\operatorname{arcsinh}(a\sinh a)+a\sinh a\sqrt{1+a^2\sinh^2 a}\right]\\&=\pi\left[a\sinh a\sqrt{1+a^2\sinh^2 a}+\ln\left(a\sinh a+\sqrt{1+a^2\sinh^2 a}\right)\right].\end{aligned} \tag{88}$$

其中 $t_0=\arctan(a\sinh a)$.

(b). 旋转体侧面积：

$$\begin{aligned}S(\Omega)&=\int 2\pi y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^{\pi}(r\sin\theta)\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\,\mathrm{d}\theta)^2}\\&=2\pi\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\&=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{32\pi}{5}a^2.\end{aligned} \tag{89}$$

2.2.6 综合练习

1. 计算下列积分：
   (a). $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+1/x}\,\mathrm{d}x.$
   (b). $\displaystyle\int_{0}^{n\pi}x|\sin x|\,\mathrm{d}x$ （n 为自然数）.
   (c). 设 $\displaystyle f(x)=\int_{x}^{x+2\pi}(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_{0}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. 证明：
$$\frac{1}{2n+2}<\int_{0}^{\pi/4}\tan^{n}x\,\mathrm{d}x<\frac{1}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{90}$$
3. 设 $f(x)$ 处处连续，$f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在. 记 $\displaystyle F(x)=\int_{0}^{1}f(xy)\,\mathrm{d}y$，证明 $F(x)$ 处处可导，并求出 $F'(x)$.
4. 设函数 f 处处连续，证明：
$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{a}^{b}[f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a).\tag{91}$$
5. 证明：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$
6. 设 $f(x)\in\mathrm{C}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant0$ 恒成立. 记 $\displaystyle F(x)=\int_{a}^{x}f(u)\,\mathrm{d}u+\int_{b}^{x}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}$，证明：方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 中有且仅有一个实根.

解 1. (a). 假定被积函数原函数形式为 $f(x)\mathrm{e}^{x+1/x}$，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\mathrm{e}^{x+1/x}\right]=\left[f'(x)+\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)f(x)\right]\mathrm{e}^{x+1/x}=\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+1/x},\tag{92}$$
由第二项猜测 $f(x)=x$，验证正确，因此
$$\int_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+1/x}\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x+1/x}\Big|_{1/2}^{2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{5/2}.\tag{93}$$
(b). 当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ $(n\in\mathbb{N}^{*})$ 时，$|\sin x|=(-1)^{n}\sin x$，因此
$$\begin{aligned}\int_{0}^{n\pi}x|\sin x|\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-1)^{k}x\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\left[-x\cos x\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}+\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\cdot(-1)^{k}(2k+1)\pi=n^{2}\pi.\end{aligned}\tag{94}$$

(c). 记 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，同时注意到 $\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}$ 为奇函数且以 2π 为中心，因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+2\pi} (1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t + \frac{I}{1+x} \\ &= 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t + \frac{I}{1+x} \\ &= 2\pi + \frac{I}{1+x}, \end{aligned} \tag{95}$$

从而

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi + I\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad I=\frac{2\pi}{1-\ln 2}. \tag{96}$$

2. 先将被积函数改写为可用 $\tan x$ 表示的有理函数积分：

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^n x}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}(\tan x) \xlongequal{u=\tan x} \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,. \tag{97}$$

显然在 $[0,1]$ 上，$2u\leqslant 1+u^2\leqslant 2$，因此

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{u^n}{2}\,\mathrm{d}u < \int_0^1 \frac{u^n\,\mathrm{d}u}{1+u^2} < \int_0^1 \frac{u^n}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2n}. \tag{98}$$

3. 希望含 x 的项仅出现在上下限而非被积函数中，因此记 $u=xy$，则

$$F(x)=\int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{99}$$

由于 $f(x)$ 连续，故其可积，从而 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 处处连续可导. 当 $x=0$ 时，$F(0)=\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}y=0$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - xf(0)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0), \tag{100}$$

因此 $F(x)$ 在 $x=0$ 处亦可导. 综上，$F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{101}$$

4. 希望含 x 的项仅出现在上下限而非被积函数中，因此在第一项中记 $u=x+h$，则

$$\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_{a+h}^{b+h} f(u)\,\mathrm{d}u\,, \tag{102}$$

因此由 L'Hospital 法则及 $f(x)$ 的连续性，

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)-0] = f(b)-f(a). \tag{103}$$

5. 当 $n\pi\leqslant t<(n+1)\pi$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 时，注意到对于 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，均有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = (-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = (-1)^k[(-1)^k-(-1)^{k+1}] = 2, \tag{104}$$

又因为 $|\sin t|$ 非负，故

$$2n = \int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t < \int_0^{x} |\sin t|\,\mathrm{d}t < \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2(n+1), \tag{105}$$

因此

$$\frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1} < \frac{1}{x}\int_0^{x} |\sin t|\,\mathrm{d}t < \frac{2}{\pi}\frac{n+1}{n}. \tag{106}$$

当 $x \to +\infty$ 时，$n \to \infty$，由夹逼准则，

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}. \tag{107}$$

6. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内非负，因此

$$F(a) = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant 0, \quad F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{108}$$

由零点存在定理，$\exists x_0 \in [a,b]$，使得 $F(x_0) = 0$. 下证 x_0 唯一. 考虑 $F(x)$ 的单调性：

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geqslant 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad F(x)\text{单调递增}, \tag{109}$$

因此 x_0 唯一. 综上，$F(x) = 0$ 在 (a,b) 内仅有一个实根.