数学分析期末复习

邓嘉驹

2023 年 7 月 18 日

目录

1 期末知识点回顾 **3**
1.1 偏导数与全微分 . . . 3
1.2 方向导数与梯度 . . . 3
1.3 空间曲线切线与法平面的构建 . . . 3
1.4 空间曲面法线与切平面的构建 . . . 3
1.5 二元 Taylor 公式 . . . 4
1.6 极值判断与 Lagrange 乘子法 . . . 4
1.7 重积分的性质 . . . 5
1.8 第一型曲线积分和曲面积分表达式的构建 . . . 5
1.9 第二型曲线积分和曲面积分的计算 . . . 6
1.10 调和函数 . . . 7
1.11 数项级数审敛法 . . . 7
1.12 函数项级数 . . . 8
1.13 幂级数 . . . 8
1.14 重要 Taylor 级数 . . . 9
1.15 Fourier 级数 . . . 9
1.16 Parseval 等式 . . . 10
1.17 Fourier 积分 . . . 11
1.18 反常积分敛散性证明 . . . 11
1.19 含参变量的常义积分的五个分析性质 . . . 11
1.20 一致收敛的含参反常积分 . . . 12
1.21 Euler 积分 . . . 13

2 答题技巧 **14**
2.1 重要的书写格式 . . . 14
2.2 曲面相截的第一类曲面积分的计算 . . . 14
2.3 第二型曲面积分的计算 . . . 14
2.4 含 $\ln p_n(x)$ 项反常积分敛散性证明 . . . 15
2.5 幂级数的计算 . . . 15

2.6 积分第二中值定理 15
2.7 判断化为 Γ 函数或 B 函数的方法 15

3 往年真题卷自解 **16**
3.1 2017-2018 年 16
3.2 2018-2019 年 19
3.3 2019-2020 年 20
3.4 2020-2021 年 24
3.5 2021-2022 年 26

1 期末知识点回顾

1.1 偏导数与全微分

1. 具体点偏导数的计算：$\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{M_0(x_0,y_0)} = \left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.
2. 全微分：$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，由此
$$z = f(x,y)\text{在}M_0(x_0,y_0)\text{可微} \iff \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho} = 0.$$
3. 链式法则.

1.2 方向导数与梯度

1. 方向导数：$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} = \lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$，其中
$$\vec{\boldsymbol{n}} // (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$
2. 梯度：$\nabla = \hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{\partial}{\partial z}$.
3. 两者关系：$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} = \nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.

1.3 空间曲线切线与法平面的构建

1. 切线的构建：对于参数式，坐标沿着曲线随参数的单调变化而变化，因此矢量场的增长率对应于各坐标分量关于参数的增长率，即切向量为各坐标对参数的导数，由此可求解曲线某点的切向量. 确定方向后结合这一点的坐标，由点斜式可唯一确定切线；对于隐式即曲面交线表达的形式，注意到曲线分别在两个曲面上，因此其切线处于两个曲面在该点的切平面内，即两个曲面在该点的法向均与该曲线切向垂直，因此两者法向量叉乘即可得到曲线切向量，结合坐标又点斜式可唯一确定法线.
2. 法平面的构建：法平面的法向量即曲线的切向量，由点法式可确定法平面方程.

1.4 空间曲面法线与切平面的构建

1. 法线的构建：由于显式曲面 $z = f(x,y)$ 可写为隐式曲面 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ 的形式，故放在一起讨论. 对于隐式曲面，考虑 $F(x,y,z)$ 的等值面，由梯度的几何含义——表征函数值变化最快的方向，可确定梯度在等值面上即曲面法向，当等值为 0 时亦然. 结合这一点的坐标由点法式可唯一确定法线；对于参数式曲面 $\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)$，设想每次固定一变量而改变另一变量，可在曲面上得到由相交曲线构成的“网格”，而由上一小节的讨论，$\vec{\boldsymbol{r}}'_u, \vec{\boldsymbol{r}}'_v$ 分别代表仅当 u,v 变化时得到的曲线的切向. 考虑到这两条曲线并不平行，并且法向与该点各切向均正交，因此 $\vec{\boldsymbol{r}}'_u \times \vec{\boldsymbol{r}}'_v$ 可得到曲面法向，由点法式可确定法平面方程.
2. 切平面的构建：切平面的法向量即曲线的切向量，由点法式可确定切平面方程.

1.5 二元 Taylor 公式

记 $h=x-x_0, k=y-y_0$，则

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+R_n,$$

其中余项

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1.$$

注 考试中通常遇到的是 $f(g(x,y))$ 的形式，即可以将与 x,y 有关的项统一换元写成 $u=g(x,y)$，从而对形式简单的函数 $f(u)$ 关于 u 进行一元 Taylor 展开，再根据展开次数需求回代 $g(x,y)$，如将 e^{x^2+y} 展开到 3 次.

1.6 极值判断与 Lagrange 乘子法

1. 无条件极值：设 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，记

   $$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0),$$

   可定义 Hessen 矩阵 $Hf(M_0)=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$.

   (1) $A>0$ 且 $AC-B^2>0$，即 Hf 正定 $\Rightarrow f(M_0)$ 极小.

   (2) $A<0$ 且 $AC-B^2>0$，即 Hf 负定 $\Rightarrow f(M_0)$ 极大.

   (3) $AC-B^2<0$ 即 Hf 非定 $\Rightarrow f(M_0)$ 非极值.

   (4) $AC-B^2=0\Rightarrow$ 结论不定.

   反之，若 $f(M_0)$ 为极值点，则必有 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

2. 条件极值：引入约束条件 $\varphi(x,y)$，考虑 Lagrange 乘子法，构造函数

   $$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

   求解 $L(x,y,\lambda)$ 的极值点. 这类题目通常会告知所求的极大（小）值，因此求出驻点后比较各点函数值即可.

   对于更多元的情形，自变量为 $x_1,\cdots,x_n$，约束条件记为 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=0\ (i=1,2,\cdots,k)$，其中 $k\leqslant n-1$，则引入 λ_i，构造函数

   $$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_i),$$

   其余操作同上.

3. 值得一提的是，以上讨论的极值可能存在的区域为全空间，若局限在闭域内讨论，则以上分析的极值点或者说可能最值点仅仅为其内部的点. 除此之外还需要将边界满足的方程代入函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 中，单独考虑边界上的最值点. 考试中若涉及此情形，通常为二元，则代入边界后退化为一元函数求最值问题.

1.7 重积分的性质

1. $\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$，等号成立当且仅当 f 在 D 上不变号.
2. 变量代换公式：记变量代换 $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n) \to \vec{\boldsymbol{y}} = (y_1, \cdots, y_n)$，则引入 Jacobi 矩阵 $J(\vec{\boldsymbol{x}}) =$

$$J(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad (J(\vec{\boldsymbol{x}}))_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

因此 Jacobi 行列式 $\left|\dfrac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right| = |J(\vec{\boldsymbol{x}})|$，记

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n)),$$

从而

$$\iint \cdots \int_{\Omega_x} f(x_1, \cdots, x_n)\ \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \iint \cdots \int_{\Omega_y} g(y_1, \cdots, y_n) \|J(\vec{\boldsymbol{x}})\|\ \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n.$$

1. 广义极坐标变换：$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\mathrm{d}y = ab\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$
2. 柱坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$
3. 球坐标：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$
4. 对于积分区域 $|x| + |y| \leqslant a\ (a > 0)$，常有换元 $\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \end{cases}$ 得到 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

1.8 第一型曲线积分和曲面积分表达式的构建

1. 第一型曲线积分：关键在于弧长公式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

由于空间仅有沿曲线变化这一个自由度，因此接下来的工作是选择合适的参数表示这一自由度. 对于参数式，显然可直接选取参数 t，则 $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$，其余两变量类似，且 $f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t)) \xlongequal{\triangle} g(t)$，从而将其转化成关于单变量 t 的积分；对于交面式，

在曲面方程中，凭经验选择可能使表达式简单的坐标为参数，具体来说若为多项式通常选取次数最高者为参数. 假定以 z 为参数，对曲面方程全微分后得到 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 的方程组，常数项均正比于 $\mathrm{d}z$，因此解方程可得到 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}z$ 的关系，进而 $f(x,y,z) = f(x(z), y(z), z)$，从而将其转化成关于单变量 z 的积分.

2. 第一型曲面积分：考试中通常出现显式曲面，这里仅对此进行讨论，更完成的内容参见相关章节讲义. 对于显式曲面 $z = f(x,y)$ 其关键在于将 $\mathrm{d}S$ 投影到 xy 平面的因子

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这一因子的获取方式为先求解曲面任一点法向量（前已讨论），由于法向量唯一表征该处面元的取向，因此 $\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的夹角即法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 的夹角（或者其补角），因此

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}|}{|\vec{\boldsymbol{n}}|} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y|\cos\theta|.$$

1.9 第二型曲线积分和曲面积分的计算

考试中基本只会出现闭合曲线和闭合曲面（最多需要补一个平行于某一坐标平面的平面区域），因此可放心大胆用 Gauss 定理和 Stokes 定理.

1. Gauss 定理：$\displaystyle\oiint_{\partial\Omega} \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\, \mathrm{d}V.$
2. Stokes 定理：$\displaystyle\oint_{\partial D} \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \iint_{D} (\nabla \times \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}.$
3. Green 公式：$\displaystyle\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

   注 使 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ 时可得到面积公式，为简单起见可令 $P = -y, Q = x$，则

$$A(D) = \iint_{D} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\oint_{D} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\,.$$

   不过坦白说这个公式多数情况下缺乏实用价值，只有对于多边形这种区域复杂但边界简单的区域计算面积时有奇效.

4. Green 第一公式：$\displaystyle\oint_{L} u\frac{\partial v}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s = \iint_{D} (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$
5. Green 第二公式：$\displaystyle\oint_{L} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}}\right)\mathrm{d}s = \iint_{D} (u\Delta v - v\Delta u)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 特别地，在 Green 第一公式中，令 $u = 1$，可得到[1]

$$\oint_{L} \frac{\partial u}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s = \iint_{D} \Delta u\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[1] 2020-2021 年期末卷有考察

注 特殊情形的证明思路如下：记二维平面上曲线切向为 $\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\cos\theta, \sin\theta)$，则其法向为 $\hat{\boldsymbol{n}} = (\sin\theta, -\cos\theta)$. 记弧元为 $\mathrm{d}s$，那么

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \quad \Longrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x).$$

由方向导数的定义，

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s = \oint_L \nabla u \cdot (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{Green 公式}} \iint_D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记 $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$，坐标 $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)$，则

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & \hat{\boldsymbol{x}}_2 & \hat{\boldsymbol{x}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

1.10 调和函数

1. 定义：满足 $\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = 0$ 的函数 u.

2. 性质：

   (1) 最大值和最小值只能在边界上取到，因此若最大值 = 最小值，则 u 在区域内为常数.

   (2) 在某点的函数值为以该点为球心的球面上各点函数值的平均，如二维情形有

   $$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{|MM_0|=r} f(x, y)\,\mathrm{d}s\,, \quad M(x, y), M_0(x_0, y_0) \in D,\ \{M \,||MM_0| \leqslant r\} \subset D.$$

注 同为场的二阶导数，这里补充两个恒等式

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = 0.$$

1.11 数项级数审敛法

1. 正项级数的比较判别法：对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，

$$b_n > 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 < A < +\infty, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{与} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{同敛散}, \\ A = 0, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{收敛时}, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{也收敛}, \\ A = +\infty, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{发散时}, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{也发散}. \end{cases}$$

2. 正项级数的根值判别法：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \rho < 1, & \text{级数收敛}, \\ \rho > 1, & \text{级数发散}, \\ \rho = 1, & \text{结论不定}. \end{cases}$

3. 正项级数的积分判别法：若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续、非负且单调递减，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

4. 交错级数的 Leibniz 判别法：若在交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 中，$\{a_n\}$非负、单调递减，且 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$，则该级数必收敛.

1.12 函数项级数

1. 一致收敛的判别——Weierstrass 判别法：若 $|a_n(x)| \leqslant b_n\ (\forall x \in I)$ 且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

2. 当函数项级数收敛时，可定义和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 满足交换律、结合律、分配律.

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛 $\Rightarrow$ 满足分析性质.

3. 考试中（非压轴题）出现函数项级数判断一致收敛，基本只要求使用 Weierstrass 判别法，这样可证明级数绝对一致收敛，因此有如下分析性质：

   (1) $a_n(x)\in \mathrm{C}(I) \Rightarrow S(x)\in \mathrm{C}(I)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} a_n(x)$.

   (2) $a_n(x)\in \mathrm{R}(I) \Rightarrow S(x)\in \mathrm{R}(I)$，即 $\int_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   (3) $a_n(x)\in \mathrm{C}^1(I) \Rightarrow S(x)\in \mathrm{C}^1(I)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

1.13 幂级数

1. 收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

2. 收敛区间：$I=(-R,R)$，收敛域为收敛区间加上 $x=\pm R$ 处的收敛点，如 $(-R,R]$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内逐点且绝对收敛，且内闭一致敛[2].

4. 性质：在收敛区间内满足前述三个分析性质，且积分、求导后收敛半径不变.

5. 重要幂级数：

[2] 内闭一致敛的概念在考试中基本不考察

(1) 指数函数: $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

(2) 等比级数: $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ $(-1 < x < 1)$.

6. 注意事项:

(1) 求解和函数给出最后答案时, 要带上收敛域.

(2) 注意求和指标的起点, 否则和函数会差一常数. 起点通常为 $n = 0, 1$, 有时也为 $n = 2$.

1.14 重要 Taylor 级数

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - \cdots, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \cdots, \qquad x \in (-1, 1],$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad x \in (-1, 1).$$

1.15 Fourier 级数

Dirichlet 收敛定理: 要求周期函数 $f(x)$ 分段光滑, 间断点至多为第一类间断点.

1. 以 2π 为周期:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & \text{连续点}, \\ \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & \text{间断点}, \end{cases}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \ \ (n = 0, 1, \cdots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

2. 以 $2l$ 为周期:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \begin{cases} f(x), & \text{连续点}, \\ \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & \text{间断点}, \end{cases}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \ \ (n=0,1,\cdots), \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \ \ (n=1,2,\cdots).$$

3. 正余弦级数：通常将 $f(x)$ 定义在 $[0,l]$ 上，需要作奇延拓或偶延拓，再进行 Fourier 展开.

$$\text{正弦级数：}\ f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{余弦级数：}\ f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,.$$

4. 广义展开：设有完备的标准正交[3]函数系 $\{\varphi_i(x)\}$，则

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{连续点},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{间断点}, \end{cases}$$

其中

$$c_n=\frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_0^T f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1.16 Parseval 等式

1. Parseval 等式：若 $f(x)\in L^2[-l,l]$，计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n,b_n，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. 证明思路：当 $f(x)\in \mathrm{C}[-l,1]$ 时，将 $f^2(x)$ 写成

$$f^2(x)=\frac{a_0}{2}f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx],$$

等式两端积分可证. 类似的思路可证明 $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的等式.

注 一种几何理解是，将 $f(x)$ 的 Fourier 展开写为

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\\ =&\sqrt{\frac{l}{2}}a_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sqrt{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sqrt{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right).\end{aligned}$$

[3]完备指 $\mathbb{R}$ 上任意函数均可以用这样一个函数系表示，相当于函数系是一组基；标准指各函数系中各函数与自身的内积（范数）为 1；正交指函数系中任意两个函数的内积为 0

利用三角函数系的标准完备正交性，考虑内积：

$$\begin{aligned}(f,f) &= \frac{l}{2}a_0^2\left(\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{2l}}\right) + l\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m a_n\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\\ &\quad + b_m b_n\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\\ &= \frac{l}{2}a_0^2 + l\sum_{m,n=1}^{\infty}(a_m a_n + b_m b_n)\delta_{mn} = \frac{l}{2}a_0^2 + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

这就相当于将 $f(x)$ 视为一个分解到无穷维空间的正交基上的向量，其与自身的内积即各分量相乘再相加.

1.17 Fourier 积分

当 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分段可微且绝对可积时，其 Fourier 积分为

$$f(x) = \int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\ \mathrm{d}x,\quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\ \mathrm{d}x,$$

注意 $f(x)$ 的 Fourier 积分表达式是从 0 开始积分的，而相应的系数则是从 $-\infty$ 开始积分的.

1.18 反常积分敛散性证明

1. p-积分

   (1) 第一类：$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $(a>0)$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散.

   (2) 第二类：$\displaystyle\int_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ $(b>a)$ 在 $p<1$ 时收敛，在 $p\geqslant 1$ 时收敛.

   由此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 对 $\forall p\in\mathbb{R}$ 均发散.

2. 对于含有 $\ln p_n(x)$ 项的被积函数，有专门的处理方法，具体见后续讨论.

1.19 含参变量的常义积分的五个分析性质

设 $\displaystyle\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x = g(u)$，$x\in[a,b], u\in[\alpha,\beta]$，闭域 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$，且 $f(x,u)\in \mathrm{C}(D)$.

1. $g(u)\in \mathrm{C}[\alpha,\beta]$,即对 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$, $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=g(u_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)\,\mathrm{d}x$, 即积分和极限可交换.
2. $g(u)\in \mathrm{R}[\alpha,\beta]$, 即 $\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u$.
3. 若 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$, 则 $g(u)\in \mathrm{C}^1[\alpha,\beta]$, 即 $g'(u)=\int_a^b \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$.
4. 设 $a(u),b(u)\in \mathrm{C}[\alpha,\beta]$ 且 $a\leqslant a(u)\leqslant b(u)\leqslant b$, 则 $g(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x\in \mathrm{C}[\alpha,\beta]$.
5. 若 $a(u),b(u)\in \mathrm{C}^1[\alpha,\beta]$ 且 $a\leqslant a(u)\leqslant b(u)\leqslant b$, 同时 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\in \mathrm{C}(D)$, 则 $g(u)\in \mathrm{C}^1[\alpha,\beta]$ 且

$$g'(u)=f(b(u),u)\cdot b'(u)-f(a(u),u)\cdot a'(u)+\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x\,.$$

1.20 一致收敛的含参反常积分

1. Weierstrass 判别法: 若 $\exists h(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负、连续, 且 $\int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; 当 x 充分大时, $|f(x,u)|\leqslant h(x)$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 成立, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $g(u)$.

   注 $h(x)$ 称为 $f(x,u)$ 的控制函数, $\int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ 称为含参反常积分的优(强)积分.

2. 分析性质: 记 $g(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$, $u\in[\alpha,\beta]$.
   (1) $g(u)\in \mathrm{C}[\alpha,\beta]$, $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=g(u_0)$.
   (2) $g(u)\in \mathrm{R}[\alpha,\beta]$, 且关于 x,u 的积分顺序可交换, 即

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u\,.$$

   (3) $f(x,u),\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\in \mathrm{C}(D), D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta] \Rightarrow g(u)\in \mathrm{C}^1[\alpha,\beta]$, 且

$$g'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. 重要反常积分:
   (1) Poisson 积分: $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (2) Dirichlet 积分: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

1.21 Euler 积分

1. Γ 函数：$\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,,\ x\in(0,+\infty)$.

   (1) 递推公式：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\ (x>0)$.

   (2) 特殊值：$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ \Rightarrow\ \Gamma(n+1)=n!,\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

   (3) 余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x},\ \forall x\in(0,1)$.

2. B 函数：$B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,,\ x,y\in(0,+\infty)^2$.

   (1) 对称性：$B(x,y)=B(y,x)$.

   (2) 与 Γ 函数的关系：$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

   (3) 其他形式：

   $$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}\,\mathrm{d}z}{(1+z)^{x+y}}=\int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}\,\mathrm{d}z}{(1+z)^{x+y}},$$

   最后一个等式来源于 B 函数的对称性. 由此三角函数积分可写为

   $$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{m+n}{2}\right)}.$$

2 答题技巧

2.1 重要的书写格式

1. 使用 Gauss 定理和 Stokes 定理说明单连域.
2. Gauss 定理补面说明平面域与正方向的选择.
3. Fourier 级数说明延拓.
4. 计算含参变量反常积分说明可导性.

2.2 曲面相截的第一类曲面积分的计算

这类题的关键在于确定被截的曲面和用于截取的曲面，通常前者作为基底用于确定曲面的形状，后者用于限制曲面范围（例如平面和球相截，平面截球面得到球锥的底，球面截平面得到圆面）. 当截取的曲面为母线平行于坐标轴的柱面时，投影会变得十分简单：假定母线平行于 z 轴，那么柱面方程限制在 $z=0$ 上就是被截曲面在 xy 平面的投影；当被截取的曲面为平面时，投影因子为常数，将其投影到 xy 平面也是一件非常方便的事.

2.3 第二型曲面积分的计算

1. 考试中碰到求第二类曲线（面）积分时，最优先考虑 Stokes(Gauss) 定理，通常给的场函数 $\vec{v}$ 能满足其旋度（散度）为零，从而极大简化计算.
2. 在计算势函数（差）或路径积分时，通常有以下三种方式，建议使用的程度递减：

   (1) 有些场函数分量具有很明显的特征（如本题第 2 问），这时可直接看出原函数并可在答题中直接给出.

   (2) 选择每次只有一个变量改变的最简单的折线路径，这时积分化为至多三个单变量积分.

   (3) 通过逐次积分求解势函数，以本题第 1 问为例：

$$\begin{aligned} \varphi'_x = 2x+y \quad &\Longrightarrow \quad \varphi = x^2+xy+f(y,z), \\ \varphi'_y = x+4y+2z = x+f'_y \quad &\Longrightarrow \quad f = 2y^2+2yz+g(z), \\ \varphi'_z = 2y-6z = 2y+g' \quad &\Longrightarrow \quad g = -3z^2+C, \end{aligned}$$

   因此得到势函数 $\varphi(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+xy+2yz+C$. 可见若能直接看出势函数，倒不必这么费尽心思求解；若不能直接看出，采用折线路径的方式通常计算量也会更小一些——更何况此方法最后还有数值代入这一步. 造成这种现象的原因是取折线路径积分只利用了势函数部分信息，即某些变量取特定值时的函数形式，而求解势函数则获得了其全部信息，自然操作上会更繁琐一些.

2.4 含 $\ln p_n(x)$ 项反常积分敛散性证明

1. 对于 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\ln p_n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 形式的积分，则若 $m>1$ 级数收敛，若 $m\leqslant 1$ 级数发散.

   具体操作为将 $\ln p_n(x)$ 替换为 x^α，其中 $p_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k>0\ (a_n>0)$ 为任一次数为 n 次的多项式，则积分化为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{m-\alpha}}$. 若 $m>1$，则总 $\exists\alpha>0$，使得 $m-\alpha>1$，即 $0<\alpha<m-1$. 取这样的 α，利用比较判别法的极限形式：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln p_n(x)/x^m}{1/x^{m-\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln p_n(x)}{x^\alpha}\overset{\text{L'Hospital 法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{na_nx^{n-1}/p_n(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$
$$=\frac{n}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\overset{\alpha>0}{=\!=}0,$$

   因此 $m>1$ 时积分收敛.

2. 对于 $\displaystyle\int_0^{a}\frac{\ln\bigl(1+x^kp_{n-k}(x)\bigr)}{x^m}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 形式的积分，其中 $p_{n-k}(0)\neq 0$，利用

$$\lim_{x\to0^+}x^\beta\ln p_n(x)=0,\quad\forall\beta>0,$$

   类似操作可证.

2.5 幂级数的计算

1. 若出现 $\dfrac{1}{n!}$，则最终结果与 e^x 相关，可通过对其多次微分或积分化为 $x^m\displaystyle\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的形式. 如 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，可通过对其积分化为 $x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\mathrm{e}^x$，求导还原为 $(x+1)\mathrm{e}^x$.

2. 若无 $n!$ 而含有 $(n-a)(n-b)$（无论此项出现在分子还是分母），通常通过多次微分或积分化为等比级数. 如 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 可通过凑 x^{n+1} 两次微分得到等比级数，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 可通过凑 x^{n-1} 两次积分得到等比级数.

2.6 积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2.7 判断化为 Γ 函数或 B 函数的方法

1. 若被积函数为“幂函数 $\times$含 e 相关的项（如 $\mathrm{e}^{f(x)},\ln g(x)$）”，则考虑化为 Γ 函数，具体操作为将 e 的指数项整体设为 $-t$ 再对比幂函数指数；若含有 ln 项则多一步设 $u=\ln p_n(x)$.

2. 若被积函数不含 e 相关的项，只含有幂函数的有限次乘除，则考虑化为 B 函数，通常考查较多的是化简成 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\,\mathrm{d}z$ 形式，当然日后学习使用较多的还是三角函数积分形式.

3 往年真题卷自解

3.1 2017-2018 年

1. 对方程求全微分得

$$F_1'(\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}w) + F_2'(\mathrm{d}y - b\,\mathrm{d}w) + F_3'(\mathrm{d}z - c\,\mathrm{d}w) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}w = \frac{F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\,\mathrm{d}z}{aF_1' + bF_2' + cF_3'},$$

因此

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{F_1'}{aF_1' + bF_2' + cF_3'}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{F_2'}{aF_1' + bF_2' + cF_3'}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{F_3'}{aF_1' + bF_2' + cF_3'},$$

则 $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} + c\dfrac{\partial w}{\partial z} = 1.$

2. 记 $u = x + y^2$，则将 e^u 展开后再代回 u 展开至 3 次得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x+y^2} &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + R_4(u) = 1 + (x + y^2) + \frac{1}{2!}(x + y^2)^2 + \frac{1}{3!}(x + y^2)^3 + R_4 \\ &= 1 + x + y^2 + \frac{x^2 + 2xy^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\big((x^2 + y^2)^2\big).\end{aligned}$$

3. 若 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 有势，等价于

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2\big) \quad \Longrightarrow \quad 2(a_2 - b_1)x + 2(b_2 - c_1)y = 0,$$

上式恒成立，等价于 $a_2 = b_1, b_2 = c_1$，其一个势函数容易看出为

$$\varphi(x, y) = \frac{a_1}{3}x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + \frac{c_2}{3}y^3 + C.$$

4. 由于表达式中含有 e（ln 项），因此向 Γ 函数化. 记 $u = \ln\dfrac{1}{x}$，则 $x = \mathrm{e}^{-u}, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$，那么

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-qu}\cdot u^p\,\mathrm{d}u \xlongequal{t=qu} \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{q^p}\cdot \mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{q} \\ &= \frac{1}{q^{p+1}}\Gamma(p+1). = \frac{p}{q^{p+1}}\Gamma(p).\end{aligned}$$

5. 由于 L 为简单闭函数，因此坐标 (x, y) 在其上连续变化，因此 $x(t), y(t)$ 的 Fourier 级数收敛于其自身：

$$x = \varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \quad y = \psi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt + d_n\sin nt).$$

由于这里仅给出边界方程，由 Green 公式，区域 F 的面积为

$$A(F) = \frac{1}{2}\oint_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

利用三角函数系的完备正交性即其在一周期内积分平均为 0 的性质，

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\right]\sum_{m=1}^{\infty}(-mc_m\sin mt+md_m\cos mt)\,\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}m(a_nd_m\cdot\pi\delta_{mn}-b_nc_m\cdot\pi\delta_{mn})=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),$$
$$\int_0^{2\pi}\varphi'(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t=\left.\varphi(t)\psi(t)\right|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{闭曲线}}{=\!=}-\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

因此

$$A(F)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n).$$

6. 由于 $\mathrm{e}^{ax}\in\mathrm{C}[-\pi,\pi]$，由 Dirichlet 定理，$f(x)$ 可展开成 Fourier 级数，且

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{a\pi}-\mathrm{e}^{-a\pi}}{a\pi}=\frac{2}{a\pi}\sinh(a\pi),$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{e}^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{a}{n}b_n,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{e}^{ax}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}(\mathrm{e}^{a\pi}-\mathrm{e}^{-a\pi})+\frac{a}{n}a_n=(-1)^{n-1}\frac{2}{n\pi}\sinh(a\pi)+\frac{a}{n}a_n,$$

从中解得

$$a_n=(-1)^n\frac{2a}{\pi(a^2+n^2)}\sinh(a\pi),\quad b_n=(-1)^{n-1}\frac{2n}{\pi(a^2+n^2)}\sinh(a\pi)$$

因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]=\begin{cases}f(x), & x\in(-\pi,\pi),\\ \cosh(a\pi), & |x|=\pi.\end{cases}$$

令 $x=\pi$，可证得

$$\frac{\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2a}{n^2+a^2}\cos n\pi\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2+a^2}\right].$$

7. 补充 $z=0$ 上平面域 $D:x^2+y^2\leqslant1$，其外法向沿 $-z$ 方向，这样 $S+D$ 成为法向为外法向的闭合曲面. 注意到矢量公式 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})=0$，因此

$$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=(\nabla\cdot\nabla f)\cdot\nabla g-(\nabla\cdot\nabla g)\cdot\nabla f=0-0=0.$$

同时

$$\nabla f=-\frac{2(1+z)(x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}})}{(1+x^2+y^2)^2}+\frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{1+x^2+y^2},$$
$$\nabla g=(y+z)\hat{\boldsymbol{x}}+(z+x)\hat{\boldsymbol{y}}+(x+y)\hat{\boldsymbol{z}},$$

那么

$$\begin{aligned}\iint_D \nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} &= -\iint_D \left(\left.\nabla f\right|_{z=0}\times\left.\nabla g\right|_{z=0}\right)_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \frac{2(y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{D\text{关于}x,y\text{交换对称}} 0,\end{aligned}$$

综上，由 Gauss 定理，

$$\iint_S \nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} - \iint_D \nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = 0.$$

8. 引入含参反常积分

$$F(u)=\int_0^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\,,\quad f(x,u)=\mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x},\quad u\in(0,+\infty).$$

显然 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x,u)=1\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\cdot\alpha x}{x}=0$，$x=0$ 处不是瑕点. 当 $u\in[u_0+\infty)\subset(0,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}|f(x,u)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^{ux}} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^{u_0x}} < \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot u_0x},\\ \int_1^{+\infty}\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|\mathrm{d}x &\leqslant \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{u_0x}} < \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{u_0^2x^2/2!},\end{aligned}$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛，因此上述两个含参反常积分在 $[u_0,+\infty)$ 上一致收敛，即在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致敛，那么 $F(u)$ 可导，且

$$F'(u)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\sin\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}[\cos(\alpha+1)x-\cos(\alpha-1)x]\,\mathrm{d}x\,.$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos(\alpha+1)x\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{\mathrm{e}^{-ux}\sin(\alpha+1)x}{\alpha+1}\right|_0^{+\infty}+\frac{u}{\alpha+1}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin(\alpha+1)x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{u}{(\alpha+1)^2}\left.\mathrm{e}^{-ux}\cos(\alpha+1)x\right|_0^{+\infty}-\frac{u^2}{(\alpha+1)^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos(\alpha+1)x\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

因此解得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos(\alpha+1)x\,\mathrm{d}x=\frac{u}{u^2+(\alpha+1)^2},\quad\Longrightarrow\quad\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos(\alpha-1)x\,\mathrm{d}x=\frac{u}{u^2+(\alpha-1)^2},$$

由渐进条件 $\lim\limits_{u\to+\infty}F(u)=0$，可得

$$\begin{aligned}F'(u)&=\frac{1}{2}\left[\frac{u}{u^2+(\alpha+1)^2}-\frac{u}{u^2+(\alpha-1)^2}\right],\\ F(u)&=\frac{1}{4}\ln\frac{u^2+(\alpha+1)^2}{u^2+(\alpha-1)^2}+C\quad\xrightarrow{\text{渐进条件}}\quad C=0.\end{aligned}$$

故原积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}F(u)=\frac{1}{4}\ln\frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|,\quad|\alpha|\neq1.$$

3.2 2018-2019 年

1. 对函数作全微分得

$$\phi'\left(x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)\left(\mathrm{d}x+\frac{y\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{x\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x}{x^2}\right)=0,$$

因此

$$\mathrm{d}z=\frac{y}{x}\frac{z-x^2}{x+y}\,\mathrm{d}x+\frac{xz}{(x+y)y}\,\mathrm{d}y\,,$$

从而

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y(z-x^2)+xz}{x+y}=z-\frac{x^2y}{x+y}.$$

2. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为被截曲面，圆柱 $x^2+y^2=2x$ 为截取的曲面，因此投影因子

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

曲面投影到 xy 平面得到圆柱在 $z=0$ 的截面，即单位圆，因此曲面面积

$$A=\iint_\Sigma \mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

3. 考虑等值面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=u^2$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$，其体积

$$V(u)=\frac{4\pi}{3}(au)(bu)(cu)=\frac{4\pi}{3}abcu^3\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}V=4\pi abcu^2\,\mathrm{d}u\,,$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\cdot 4\pi abcu^2\,\mathrm{d}u\xlongequal{u=\sin\theta}4\pi abc\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=4\pi abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=2\pi abc\cdot\frac{(\sqrt{\pi}/2)^2}{2!}=\frac{\pi^2}{4}abc.\end{aligned}$$

4. (1) 略.

(2) 注意到

$$\nabla\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-xr_x}{r^2}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{xr_y}{r^2}\hat{\boldsymbol{y}}-\frac{xt_z}{r^2}\hat{\boldsymbol{z}},$$

而 $r_x=\partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$，$r_y,r_z$ 类似，因此

$$\nabla\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{xy}{r^3}\hat{\boldsymbol{y}}-\frac{xz}{r^3}\hat{\boldsymbol{z}},$$

故 $\varphi(x,y,z)=\dfrac{x}{r^3}+C=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+C$ 为其势函数.

5. 注意到恒等式 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}})=0$，由 Gauss 定理，

$$\iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iiint_\Omega \nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}V=0.$$

6. 注意到 $I=\mathrm{e}\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$，记 $u=(t-1)^2$，则

$$\begin{aligned}I&=\mathrm{e}\int_0^{+\infty}\left(1+\sqrt{u}\right)^2\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{u}+2+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\mathrm{e}}{2}\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)+2\Gamma(1)+\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\mathrm{e}}{4}\left(4+3\sqrt{\pi}\right).\end{aligned}$$

7. 将函数作偶延拓，且 $f(x)\in\mathrm{C}[0,1]$ 因此 $f(x)\in\mathrm{C}[-1,1]$ 且 $f(-1)=f(1)$，其 Fourier 级数收敛于其自身，系数为

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{1}\int_0^1\cosh(x-1)\,\mathrm{d}x=2\sinh 1,\\a_n&=\frac{2}{1}\int_0^1\cosh(x-1)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\cosh(x-1)\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sinh(x-1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}\sinh(x-1)\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1\cosh(x-1)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}\sinh 1-\frac{a_n}{n^2\pi^2},\\b_n&=0,\end{aligned}$$

从中解得 $a_n=\dfrac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}$ $(n\geqslant 1)$，因此

$$f(x)=\sinh 1\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2+1}\right),\quad x\in[0,1].$$

令 $x=0$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh 1}{\sinh 1}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}.$$

8. 略.

3.3 2019-2020 年

1. 由含参变量的求导公式，

$$\begin{aligned}F'(\alpha)=&(-\sin\alpha)f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)\\&+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\left[f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha)\right]\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

2. 作柱坐标换元，

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\int_{r^2/2}^8\mathrm{d}z=\pi\int_0^4(16-r^2)r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1024}{3}\pi.$$

3. 将积分改写为二重积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan b-\arctan a=\arctan\frac{b-a}{1+ba}.\end{aligned}$$

4. 由于被积函数中不含 e，考虑向 Γ 函数化简. 记 $t=x^m$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{t^{(n-1)/m}}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{m}t^{1/m-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{n/m-1}(1-t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{m}B\left(\frac{n}{m},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma(n/m)}{\Gamma(n/m+1/2)}.\end{aligned}$$

5. 注意到曲面仅为圆柱侧面，需要补全平面外法向沿 $-z$ 方向的 $D_1:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=0,\end{cases}$ 和外法向沿 $+z$ 方向的 $D_2:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=3,\end{cases}$ 此时 $\Sigma+D_1+D_2$ 构成一个闭合曲面，其内区域记为 Ω. 记 $\vec{\boldsymbol{v}}=(x,y,z)$，则由 Gauss 定理，

$$\iint_{\Sigma+D_1+D_2}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iiint_\Omega\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V=3\iiint_\Omega\mathrm{d}V=3\cdot\pi\cdot1^2\cdot3=9\pi,$$

同时

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}&=\iint_{D_1}0\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\\\iint_{D_2}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}&=\iint_{D_1}3\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,\end{aligned}$$

因此

$$\iint_\Sigma\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=9\pi-0-3\pi=6\pi.$$

6. (1) 由于 $f(x)$ 逐段光滑且仅有第一类间断点，由 Dirichlet 定理，$f(x)$ 可展开成 Fourier 级数. 又因为 $f(x)$ 为偶函数，故其 Fourier 系数 $b_n=0$，且

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=1,\\a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\end{aligned}$$

因此

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x=\begin{cases}f(x), & |x|\neq pi/2,\\1/2, & |x|=\pi/2.\end{cases}$$

(2) 令 $x=0$，可得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1^2\,\mathrm{d}x=1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

7. $F=0,G=0$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}_1=(y_0z_0,z_0x_0,x_0y_0),\quad\vec{\boldsymbol{n}}_2=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right),$$

由点法式可计算得两者在该点的切平面：

$$\pi_1:y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=3\lambda,\quad\pi_2:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1,$$

两者重合时对应系数相等，即

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{x_0}{a^2y_0z_0}=\frac{y_0}{b^2z_0x_0}=\frac{z_0}{c^2x_0y_0}\quad\xrightarrow[x_0,y_0,z_0>0]{x_0y_0z_0=\lambda}\quad\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}.$$

又因为 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$，从中解得

$$x_0=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_0=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}\quad\Longrightarrow\quad\lambda=x_0y_0z_0=\frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

8. (1) 连续性：作极坐标变换，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\rho\sin\theta\cos\theta=0=f(0,0),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 可微性：注意到

$$f'_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x}=0,\quad f'_y(0,0)=\frac{\mathrm{d}f(0,y)}{\mathrm{d}y}=0,$$

因此在 $(0,0)$ 附近作极坐标变换

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\sin\theta\cos\theta}{\rho}=\sin\theta\cos\theta$$

与 θ 相关，即极限不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

9. 记向量场 $\vec{\boldsymbol{v}}=(f,g)$，则在 U 内由 Green 公式，

$$\oint_{\partial U}\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\iint_U\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

记 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$，上述闭路积分可写为

$$\oint_{\partial U}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\oint_{\partial U}f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta)(-\sin\theta)+g(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta]\,\mathrm{d}\theta$$
$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}2\pi[g(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-f(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi]=0.$$

其中 $0<\varphi<2\pi$，记 $\xi=\cos\varphi,\eta=\sin\varphi$，那么有

$$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi.$$

10. 该二元非齐次方程存在一特解 $f=f(r)$，代入方程得

$$r=\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\quad\Longrightarrow\quad f(r)=\frac{1}{12}r^3,$$

因此积分结果为

$$\begin{aligned}I&=\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_\Omega r\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}V=4\pi\int_0^1 r\cdot\frac{1}{4}r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

11. (1) 正交阵满足：

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{pmatrix}=I\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=1,\\ac+bd=0,\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}f_{xx}+f_{yy}&=\partial_x(af_u+cf_v)+\partial_y(bf_u+df_v)\\&=(a^2+b^2)f_{uu}+2(ac+bd)f_{uv}+(c^2+d^2)f_{vv}\\&=1\cdot f_{uu}+0+1\cdot f_{vv}=f_{uu}+f_{vv}.\end{aligned}$$

(2) i. 对于 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，由链式法则，

$$\begin{aligned}f_{xx}+f_{yy}&=\partial_x(u_xf_u+v_xf_v)+\partial_y(u_yf_u+v_yf_v)\\&=|\nabla u|^2f_{uu}+|\nabla v|^2f_{vv}+2(\nabla u\cdot\nabla v)f_{uv}+\Delta uf_u+\Delta vf_v\\&=f_{uu}+f_{vv},\end{aligned}$$

由此可得 $|\nabla u|=|\nabla v|=1,\nabla u\cdot\nabla v=0,\ \Delta u=\Delta v=0$，从而 Jacobi 矩阵满足

$$\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\nabla u|^2&\nabla u\cdot\nabla v\\\nabla u\cdot\nabla v&|\nabla v|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,$$

因此 Jacobi 矩阵为正交矩阵.

ii.

3.4 2020-2021 年

1. 由含参变量的常义积分的求导公式，

$$I'(u)=(-\sin u)\cdot \mathrm{e}^{\cos^2 u-u\cos u}-\cos u\cdot \mathrm{e}^{\sin^2 u-u\sin u}-\int_{\sin u}^{\cos u} x\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. (1) 注意到

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}&=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{y}{z}-\dfrac{1}{y} & \dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2} & 1-\dfrac{xy}{z^2}\end{vmatrix}\\ &=\Big(-\frac{x}{z^2}+\frac{x}{z^2}\Big)\hat{\boldsymbol{x}}+\Big(-\frac{y}{z^2}+\frac{x}{z^2}\Big)\hat{\boldsymbol{y}}+\left[\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}\right)\right]\hat{\boldsymbol{z}}\\ &=0\end{aligned}$$

对 $\forall x\in\mathbb{R},y>0,z>0$ 成立，因此 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 为有势场.

(2) 注意到

$$\nabla\left(\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2}\right)=\vec{\boldsymbol{v}}-(0,0,1),$$

因此 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 的势函数为

$$\varphi(x,y,z)=z+\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+C,\quad C\text{为任意常数.}$$

(3) 由于无旋场路径积分值与路径无关，恰为两点势的差，因此

$$\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\varphi(1,2,3)-\varphi(1,1,1)=\left(3+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-(1+1-1)=\frac{13}{6}.$$

3. (1) 该曲线可分为三段：

$$L_1:0\leqslant x\leqslant 2,y=0,\quad L_2:x^2+y^2=4,0\leqslant y\leqslant x,\quad L_3:y=x,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},$$

其中 L_2 在极坐标中表示为 $L_2:\rho=2,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，因此

$$\begin{aligned}\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s&=\sum_{i=1}^{3}\int_{L_i}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^2\cdot 2\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\\ &=(\mathrm{e}^2-1)+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2+(\mathrm{e}^2-1)=\Big(2+\frac{\pi}{2}\Big)\mathrm{e}^2-2.\end{aligned}$$

(2) 利用 Green 第一公式，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s&=\iint_D\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sin\big(x^2+y^2\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标变换}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot 1=2\pi.\end{aligned}$$

4. S 的曲面方程为 $\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x}$，即 $S: y^2+z^2=x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$. 由于 S 不是闭合曲面，考虑补一平面 $D:\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=1, \end{cases}$ 其法向为 x 轴正向，此时 $S+D$ 构成法向为外法向的闭合曲面. 记 $\vec{\boldsymbol{v}}=(2(1+x),0,yz)$，则 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=2+y$，

$$\iint_D \vec{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint_D 2\cdot(1+1)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi.$$

利用积分区域关于 y 坐标的对称性，由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\iint_{S+D} \vec{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}&=\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega (2+y)\,\mathrm{d}V\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\rho\,\mathrm{d}\rho+0=\pi,\end{aligned}$$

因此

$$I=\iint_S \vec{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\pi-4\pi=-3\pi.$$

5. (1) 注意到区间并不关于 y 轴对称，而是半区间，需要展开成余弦级数，因此将 $f(x)$ 作偶延拓，得到

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=0,\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\Big|_0^\pi+\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)]^n.\end{aligned}$$

由于 $f(x)\in \mathrm{C}[0,\pi]$，因此作偶延拓后 $f(x)\in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$ 且 $f(-\pi)=f(\pi)$，因此

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad x\in[0,\pi].$$

(2) 令 $x=0$，得 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛，因此将其按奇偶项划分：

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}$ 绝对收敛，因此将其按奇偶项划分：

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{(2n)^4}\right]=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

6. (1) 由于被积函数不含 e，因此考虑向 B 函数化简. 令 $z=x^2$，则

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha/2}}{1+z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{z^{(\alpha-1)/2}}{1+z}\,\mathrm{d}z\,.$$

对比 B 函数的表示形式，要求

$$y=\frac{\alpha-1}{2}+1=\frac{\alpha+1}{2}>0,\quad x=1-y=\frac{1-\alpha}{2}>0,$$

即要求 $-1<\alpha<1$.

(2) 满足此条件时，$\varphi(\alpha)$ 可用 B 函数表示：

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)&=\frac{1}{2}B\left(\frac{1-\alpha}{2},\frac{1+\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\\&\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\dfrac{1-\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha/2)},\quad -1<\alpha<1.\end{aligned}$$

(3) 将积分区间拆分为 $[0,1)$ 和 $[1,+\infty)$，那么

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha_0}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha_0}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha_0/2)},\\\left|\int_0^{1}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_0^{1}\frac{x^{-\alpha_0}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=1/x}\int_1^{+\infty}\frac{u^{\alpha_0}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u<\frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha_0/2)},\end{aligned}$$

由 Weierstrass 判别法，$\varphi(\alpha)$ 在 $[-\alpha_0,\alpha_0]\subset(-1,1)$ 上一致收敛.

7. 略.

3.5 2021-2022 年

1. 由递推公式，$\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

2. $f(x)=\cos 2x+\dfrac{1}{3}\sin 2x$，$x\in[-\pi,\pi]$. 由三角函数系的完备正交性，$a_2=1,b_2=\dfrac{1}{3}$，其余 a_n,b_n 均为 0.

3. 注意到 L 并非闭曲线，因此路径积分按定义计算：

$$\begin{aligned}\int_L\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}&=\int_0^{2\pi}(t+\sin t,t+\cos t,\cos t+\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t,1)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}[t(\cos t-\sin t)+\cos 2t+\cos t+\sin t]\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}t(\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}t\\&=\ t(\sin t+\cos t)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

4. 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微，且 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 可展开为 Fourier 级数，且

其系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\sin n, \\ b_n &= 0, \end{aligned}$$

因此

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\right) = \begin{cases} f(x), & |x| \neq 1, \\ 1/2, & |x| = 1. \end{cases}$$

令 $x = 0$，可得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$. 由 Parseval 等式，

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

5. 由于 S 是闭合曲面，其在球坐标下方程为 $S : r = \cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} &= \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega (y^2 + z^2 + x^2)\,\mathrm{d}V \\ &\xlongequal{\text{球坐标变换}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r^2 \cdot r^2\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/2} -\cos^5\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{\pi}{15}. \end{aligned}$$

6. (1) $\vec{\boldsymbol{v}}$ 在 D_1 内没有奇点，因此可对任意闭曲线 $L \subset D_1$ 及其围成的区域 D 直接应用 Green 公式：

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2x^2 + b^2y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{a^2x^2 + b^2y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left[\frac{b^2y^2 - a^2x^2}{(a^2x^2 + b^2y^2)^2} - \frac{b^2y^2 - a^2x^2}{(a^2x^2 + b^2y^2)^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

(2) 等价于证明存在不同的闭路 L 使得 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 关于 L 的环路积分不同.

i. 对于不包含原点（奇点）的闭路 L，结论与第 (1) 问相同，$\displaystyle\oint_L \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$.

ii. 对于包含原点的闭路 L，考虑一特殊闭路椭圆线 $\Gamma : a^2x^2 + b^2y^2 = r^2$，将其写为参数方程的形式 $\begin{cases} x = r\cos\theta/a, \\ y = r\sin\theta/b, \end{cases}$ 那么环路积分写成

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{a^2x^2 + b^2y^2} &= \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{r}{a}\sin\theta\cdot\frac{r}{b}(-\sin\theta) + \frac{r}{a}\cos\theta\cdot\frac{r}{b}\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{ab}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{ab}. \end{aligned}$$

由此可见 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 的环路积分值与积分路径有关，故 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 不是 D_2 上的有势场.

7. 记含参反常积分 $F(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+ux^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，$u\in(0,+\infty)$，显然 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+ux^2)}{1+x^2}=u$，因此 $x=0$ 不是被积函数的瑕点. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ux^2)/(1+x^2)}{1/x^{3/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ux^2)}{\sqrt{x}}=0,\quad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}\text{收敛},$$

因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+ux^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 绝对一致收敛到 $F(u)$. 而对 $\forall u_0>0$，在 $[u_0,+\infty)$ 内，

$$\left|\frac{x^2}{(1+x^2)(1+ux^2)}\right|\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)(1+u_0x^2)}\sim\frac{1}{u_0x^2},\quad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{u_0x^2}\text{收敛},$$

因此 $F(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $F'(u)$ 在 $[u_0,+\infty)$ 上绝对一致收敛，那么

$$\begin{aligned}F'(u)&=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ux^2)}=\frac{1}{u-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+ux^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{u-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u}+1}\right),\end{aligned}$$

利用渐进条件 $\displaystyle\lim_{u\to0^+}F(u)=0$，积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=F(4)=F(0^+)+\int_{0^+}^4F'(u)\,\mathrm{d}u&=\frac{\pi}{2}\int_0^4\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u}+1}\right)\mathrm{d}u\\&\xlongequal{t=\sqrt{u}}\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{u}\Big|_0^4-\int_0^2\frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t}\right)=\pi\ln\left(1+\sqrt{u}\right)\Big|_0^4=\pi\ln3.\end{aligned}$$

8. 略.