微分方程与级数复习

邓嘉驹

更新：January 13, 2024

目录

1 微分方程 **3**

1.1 要点与技巧 . . . 3

1.1.1 常见可积一阶微分方程 . . . 3

1.1.2 二阶线性微分方程 . . . 3

1.2 习题讲解 . . . 4

1.2.1 一阶微分方程的求解 . . . 4

1.2.2 二阶线性微分方程的求解 . . . 5

1.2.3 综合练习 . . . 7

2 级数 **9**

2.1 要点与技巧 . . . 9

2.1.1 正项级数的基本性质 . . . 9

2.1.2 正项级数的审敛法 . . . 9

2.1.3 重要正项级数 . . . 10

2.1.4 绝对收敛与条件收敛 . . . 10

2.1.5 一般级数的审敛法 . . . 10

2.1.6 和函数与一致收敛 . . . 11

2.1.7 幂级数 . . . 12

2.1.8 重要幂级数 12
2.1.9 和函数计算的技巧 12
2.1.10 常用 Taylor 级数 13
2.2 习题讲解 13
2.2.1 判断正项级数的敛散性 13
2.2.2 一般数项级数的条件收敛性与绝对收敛性 15
2.2.3 函数项级数收敛域的计算 16
2.2.4 一致收敛性的判断 18
2.2.5 幂级数收敛半径的计算 18
2.2.6 幂级数和函数的计算 19
2.2.7 Taylor 级数 22
2.3 综合练习 23

1 微分方程

微分方程这一章在物理学院的数学课程学习中并不是那么不可或缺的，因为复变函数中会学习利用 Laplace 变换求解一些基本的方程，而到了数理方程则会针对物理教学需求专门讲解特定方程的求解方法. 不过这一章仍然是很关键的一章，因为它的基本原理（如常数变易法）是能比较广泛使用的，并且和基础物理学联系甚紧，如这个学期力学课程中学习的受迫振动. 这其中有两类非常重要的方程——一阶和二阶线性微分方程，这也是考试中最主要考察的方向. 但归根结底这类考题套路比较固定，所以并不算难点.

1.1 要点与技巧

1.1.1 常见可积一阶微分方程[1]

1. 可分离变量方程：$y'(x)=h(x)g(y)\ \Rightarrow\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int h(x)\,\mathrm{d}x.$
2. 齐次方程：$y'(x)=\varphi(y/x)\ \Rightarrow$ 令 $u=y/x$，则 $y=u+xu'$，代入后可化为可分离变量方程.
3. 一阶线性微分方程：$y'+P(x)y=Q(x)\ \Rightarrow$ 方程通解为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right). \tag{1}$$

4. Berouli 方程：$y'+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\in\mathbb{R},n\neq0,1)\ \Rightarrow$ 令 $u=y^{1-n}$，化为一阶线性微分方程.

前两种类型比较好辨认，只要将方程左端写成 $y'(x)$，对右端表达式判断即可，最重要的是一阶线性微分方程的求解公式.

1.1.2 二阶线性微分方程

1. 方程形式：$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$. 特别地，若 $a(x),b(x)$ 均为常数且 $f(x)=0$，则该方程为二阶常系数齐次线性微分方程，有特征方程

$$\lambda^2+a\lambda+b=0. \tag{2}$$

   该方程的解 $\lambda_1\neq\lambda_2\ (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C})$ 时，通解为 $C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$；$\lambda_1=\lambda_2$ 时，通解为 $(A+Bt)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$.
2. 方程解的结构：$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)$，其中 $\bar{y}$ 为方程通解，$y^*(x)$ 为方程特解.
3. 先解出齐次方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的一个通解 $y_1(x)$. 若 $a(x),b(x)$ 为常数，则按第 1 条给出的方法求解即可；否则靠直觉猜一个特解. 但绝大多数考题中 $a(x),b(x)$ 为不超过 2 次的多项式，因此可按 $\mathrm{e}^x,1,x,x^2$ 及其线性组合的顺序猜出齐次通解 $y_1(x),y_2(x)$.
4.（不建议）得到 $y_1(x)$ 后，代入 Liouville 公式得到另一通解 $y_2(x)$：

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(u)}\mathrm{e}^{-\int a(u)\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\,. \tag{3}$$

[1]其实还有 Riccati 方程：$y'(x)=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)\ (P(x)\neq0)$ 且已知方程一个特解. 但该方程不要求掌握

5. $y^*(x)$ 依然建议如果能直接猜出形式还是用猜的手段. 当 $a(x), b(x)$ 为低次多项式时，试探特解通常取为 $f(x)$. 若无法直接看出，则代入以下公式求出：

$$y^*(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(u)}{w(u)} f(u)\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int \frac{y_1(u)}{w(u)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{4}$$

$$= \int \frac{f(u)}{w(u)} \begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,, \tag{5}$$

其中 $w(x)$ 为 Wronski 行列式：

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x). \end{vmatrix} \tag{6}$$

1.2 习题讲解

1.2.1 一阶微分方程的求解

1. $(1+x^2)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$.
2. $xy' + y = y^2$.
3. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.
4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.
5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$, $y(\pi) = 1$.
6. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

解 1. 可分离变量型：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad\Longrightarrow\quad \ln y = \arctan x + \ln C \quad\Longrightarrow\quad y = C\mathrm{e}^{\arctan x}. \tag{7}$$

2. 可分离变量型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad \ln x + \ln C = \ln\left(1 - \frac{1}{y}\right), \tag{8}$$

即方程的解为 $y(x) = \dfrac{1}{1-Cx}$.

3. 齐次型：令 $u = y/x$，则 $y' = u + xu'$，代入得

$$u + xu' = u + \frac{1}{u} \quad\Longrightarrow\quad u\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Longrightarrow\quad y^2 = (xu)^2 = x^2(\ln x^2 + C). \tag{9}$$

4. 一阶线性：

$$y(x) = \exp\left(\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left[\int (1+x^2)\exp\left(\int -\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C\right] = (1+x^2)(x+C). \tag{10}$$

5. 一阶线性：

$$y(x) = \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\left[\int \frac{\sin x}{x}\exp\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\mathrm{d}x + C\right] = \frac{C - \cos x}{\pi}. \tag{11}$$

代入 $y(\pi) = 1$，解得 $C = \pi - 1$，因此方程的解为

$$y(x) = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}, \quad x \neq 0. \tag{12}$$

6. 一阶线性：令 $u=y'$，则化为一阶线性，即

$$u(x)=\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\left[\int x\exp\left(\int-\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\mathrm{d}x+2C_1\right]=x(x+2C_1), \tag{13}$$

因此积分得方程通解

$$y(x)=\int u(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2. \tag{14}$$

1.2.2 二阶线性微分方程的求解

1. $x^2y''-2xy'+2y=x^3$（Euler 方程）.
2. $xy''-(1+x)y'+y=0$.
3. $y''+y=2\sin\dfrac{x}{2}$.
4. $y''-6y'+9y=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

解 1. (a). 解法一：Euler 方程的特征为各项 x 的指数与 y 的求导阶数相同，即 $x^ny^{(n)}$，且为齐次方程，因此令 $x=\mathrm{e}^t$，则

$$y_t=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^ty', \tag{15}$$

$$y_{tt}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{e}^ty'+\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^ty''), \tag{16}$$

代入 $x=\mathrm{e}^t$，因此 $xy'=y_t, x^2y''=y_{tt}-y_t$，代入原方程将齐次方程简化：

$$0=(y_{tt}-y_t)-2y_t+2y=y_{tt}-3y_t+2y, \tag{17}$$

该方程特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，因此方程通解为

$$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}=C_1x+C_2x^2. \tag{18}$$

特解取为 $y^*=kf(x)$，代入 $f(x)=x^3$ 得

$$x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)=x^2\cdot6x-2x\cdot3x^2+2x^3=2x^3=2f(x). \tag{19}$$

因此取 $k=1/2$，即方程特解为 $x^3/2$，方程的解为

$$y(x)=C_1x+C_2x^2+\frac{x^3}{2}. \tag{20}$$

(b). 解法二：对于 $a(x),b(x)$ 为多项式的情形，可依次代入 $y_0=1,y_1=x,y_2=x^2$ 试探：

$$x^2y_0''-2xy_0'+2y_0=2, \tag{21}$$

$$x^2y_1''-2xy_1'+2y_1=0-2x\cdot1+2x=0, \tag{22}$$

$$x^2y_2''-2xy_2'+2y_2=x^2\cdot2-2x\cdot2x+2x^2=0, \tag{23}$$

因此 x,x^2 是方程的两个齐次通解，即 $\bar{y}=C_1x+C_2x^2$.

2. 对于 $a(x), b(x)$ 为多项式的情形，可依次代入 $y_0 = 1, y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = \mathrm{e}^x$ 试探：

$$xy_0'' - (1+x)y_0' + y_0 = 1, \tag{24}$$
$$xy_1'' - (1+x)y_1' + y_1 = -(1+x)\cdot 1 + x = -1, \tag{25}$$
$$xy_2'' - (1+x)y_2' + y_2 = x\cdot 2 - (1+x)\cdot 2x + x^2 = -x^2, \tag{26}$$
$$xy_3'' - (1+x)y_3' + y_3 = x\mathrm{e}^x - (1+x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0, \tag{27}$$

因此 $(x+1), \mathrm{e}^x$ 为方程的两个通解[2]，方程的解为

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2(x+1). \tag{28}$$

注 由于通常只需要代入 $1, x, x^2$ 至多 x^3 即可，很少需要代入 e^x，这里给出另一种渐进方法求出方程通解. 当然，这一方法也适用于其他 $a(x), b(x)$ 为低次多项式的方程求解. 考虑 $x \to 0$ 时方程的渐进行为，假定 $y(x), y'(x), y''(x)$ 均在 $x = 0$ 附近有界，此时方程近似为

$$-y' + y \approx 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) \sim \mathrm{e}^x, \tag{29}$$

因此可设方程的原始解为 $y(x) = u(x)\mathrm{e}^x$，将其代入原方程：

$$\begin{aligned} 0 = xy'' - (1+x)y' + y &= \big[x(u''+2u'+u) - (1+x)(u+u') + u\big]\mathrm{e}^x \\ &= [xu'' + (x-1)u']\mathrm{e}^x, \end{aligned} \tag{30}$$

因此 $xu'' + (x-1)u' \equiv 0$，令 $u' = u_1$ 则可将其视为可分离变量方程，其通解为

$$u(x) = \int C_1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = C_2 - C_1(x+1)\mathrm{e}^{-x}, \tag{31}$$

故原方程的解为

$$y(x) = u(x)\mathrm{e}^{-x} = C_2\mathrm{e}^x - C_1(x+1). \tag{32}$$

3. 方程的对应的齐次方程可对应力学中的振动方程，其通解为

$$\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x. \tag{33}$$

特解取为 $y^* = kf(x)$，代入 $f(x) = \sin(x/2)$ 得

$$f'' + f = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{4}\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{4}f, \tag{34}$$

因此取 $k = 8/3$，方程的解为

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}. \tag{35}$$

[2]将 $(x+1)$ 代入原方程时，其计算结果为 $1 + (-1) = 0$，恰好与齐次方程要求的等式右侧为 0 相符，因此 $(x+1)$ 为一通解

4. 方程的特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=3$，因此方程通解为

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}. \tag{36}$$

特解取为 $y^*=k_0f_0+k_1f_1$，代入 $f_0=\mathrm{e}^{2x}$, $f_1=x\mathrm{e}^{2x}$ 得

$$f_0''-6f_0'+9f_0=(4-6\cdot2+9)\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}, \tag{37}$$

$$f_1''-6f_1'+9f_1=[(4x+4)-6(2x+1)+9x]\mathrm{e}^{2x}=(x-2)\mathrm{e}^{2x}, \tag{38}$$

因此取 $k_1=1$, $k_0=3$，方程的解为

$$y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}+(x+3)\mathrm{e}^{2x}. \tag{39}$$

1.2.3 综合练习

1. 一条曲线过点 $(2,3)$，其在坐标轴间的任意切线段被切点平分，求这条曲线.
2. 已知 $y=y(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$，且 $y=y(x)$ 的图像在点 $M(0,1)$ 与 $y=x^2-x+1$ 相切，求 $y=y(x)$.
3. 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}, y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的三个线性无关解，求此方程.
4. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$.
5. $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$.

解 1. 设曲线方程为 $y(x)$，则其过点 $(2,3)$ 表示成数学语言为 $y(2)=3$. 该曲线在任一点 x_0 的切线方程为

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0) \quad\Longrightarrow\quad \text{与}y\text{轴交点为}(0,y(x_0)-x_0y(x_0)). \tag{40}$$

由题意，$(x_0,y(x_0))$ 恰为其与坐标轴交点的中点，即 y 方向上有

$$2y(x_0)=0+y(x_0)-x_0y'(x_0) \xrightarrow{x_0\text{任意性}} \frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0 \quad\Longrightarrow\quad y(x)=\frac{C}{x}. \tag{41}$$

代入 $y(2)=3$，解得曲线方程为 $y(x)=6/x$.

2. 微分方程齐次通解为 $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$. 对于特解，通常试探解即 $f(x)$，但已知 e^x 为一齐次通解，故改代入 $f(x)=x\mathrm{e}^x$（类似特征方程出现重根的处理方式）：

$$f''-3f'+2f=[(x+2)-3(x+1)+2x]\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x, \tag{42}$$

因此方程的特解为 $y^*=-2x\mathrm{e}^x$，方程的解为

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x. \tag{43}$$

又 $y=y(x)$ 与 $y=x^2-x+1$ 相切于 $(0,1)$，因此

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=1,\\ y'(0)=C_1+2C_2-2=-1,\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}C_1=1,\\ C_2=0,\end{cases} \tag{44}$$

故最终得到的曲线方程为

$$y(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x. \tag{45}$$

3. 对于二阶线性非齐次微分方程，由于方程解的结构可写为

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x), \tag{46}$$

且任意正交的 y_1, y_2 的线性组合又可以构成一对新的方程通解，因此想方设法消去附加项 y^*，即有

$$y_2 - y_1 = \mathrm{e}^{-x} - e^{2x}, \quad y_3 - y_1 = -\mathrm{e}^{-x} \tag{47}$$

可作为方程的一组通解. 由上述对通解性质的讨论，可取方程齐次通解形式为

$$\bar{y} = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad a(x) = -(-1+2) = -1,\ b(x) = -1 \cdot 2 = -2. \tag{48}$$

对比 y_1, y_2, y_3 可知，方程特解为 $x\mathrm{e}^x$，将其代入得

$$f(x) = [(x+2) - (x+1) - 2x]\mathrm{e}^x = (1-2x)\mathrm{e}^x. \tag{49}$$

4. 对于三阶 Euler 方程，前已求得 $xy' = y_t,\ x^2y'' = y_{tt} - y_t$，则

$$y_{ttt} = (\mathrm{e}^{2t}y'' + y_t)_t = 2\mathrm{e}^{2t}y'' + \mathrm{e}^{3t}y''' + y_{tt} = x^3y''' + 2(y_{tt} - y_t) + y_{tt}, \tag{50}$$

将其代入原方程得

$$0 = (y_{ttt} - 3y_{tt} + 2y_t) + 3(y_{tt} - y_t) - 2y_t + 2y = y_{ttt} - 3y_t + 2y = 0, \tag{51}$$

该方程的特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$，因此方程通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-2t} + (C_2 + C_3 t)\mathrm{e}^t = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x + C_3 x \ln x. \tag{52}$$

5. 该方程的特征方程为 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1) = 0$，其具有两个二重根 $\pm\mathrm{i}$，则其通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x. \tag{53}$$

2 级数

这一章应该是整个数学分析 B1 的课程中最重要也最实用的一章，其中的 Taylor 级数和 B2 中要学习的 Fourier 级数是最常用的两种级数，后者在电路和光学中应用甚广. 包括电动力学中的 Legendre 函数、Besssel 函数，以及量子力学中球谐函数、合流超几何函数等微分方程级数解的理论，也是建立在这一章的学习基础上. 除此之外，关于一致收敛性的性质（尤其是 Weierstrass 判别法）也可以推广到复级数中. 作为物理学中最常用的数学工具之一，理解级数的概念并熟练掌握级数相关计算对之后的大学课程学习大有裨益.

2.1 要点与技巧

2.1.1 正项级数的基本性质

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$，常用其逆否命题证明级数发散：若 a_n 在 $n \to \infty$ 时不趋于 0，则该级数发散.
2. 增减、改变级数有限项，或者改变运算优先级，均不影响其收敛性. 这点可应用于分别计算级数的奇数项、偶数项的级数和再相加.

2.1.2 正项级数的审敛法

1. 比较判别法：这是最直接、最优先考虑的方法，因为如果对第一章内容熟练度足够，有些题是能直接简单看出其敛散性的. 一般用此判别法的极限形式，并且结合等价无穷小将原级数各项 a_n 转化成容易看出敛散性的 b_n，如 $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.
2. 比值判别法[3]：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < 1, & \text{收敛}, \\ \rho > 1, & \text{发散}, \\ \rho = 1, & \text{不定}. \end{cases} \tag{54}$$

   这类判别法的应用是相对比较多的，包括后文幂级数收敛半径的计算也是这要建立在这一原理上的.
3. 根值判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < 1, & \text{收敛}, \\ \rho > 1, & \text{发散}, \\ \rho = 1, & \text{不定}. \end{cases} \tag{55}$$

   这类判别法的针对性稍强，主要针对 n 以常数项为零的多项式出现在指数时的情况，如 $1/n^n$.

[3] 也称 d'Alembert 判别法

4. Cauchy 积分判别法：

$$f(x)\text{在}[1,+\infty)\text{上非负、单调减、连续} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\text{与}\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\text{同敛散.} \tag{56}$$

这类判别法的针对性更强，但特征也十分明显，基本上只用于级数分母中出现 $x\ln x$（以及 ln 的嵌套）的情形[4]，如 $1/n\ln n$.

2.1.3 重要正项级数

1. 等比级数：$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 在 $|q|<$ 处收敛，在 $|q|\geqslant 1$ 处发散. 这类级数较多应用于函数项级数的 Weirestrass 判别法，尤其是幂级数收敛性的判定中——在幂级数闭区间内判定其一致收敛性，一般会存在一个等比形式的优级数.
2. p-级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 处收敛，在 $0<p<1$ 处发散. 这类级数多与比较判别法的极限形式相联系，要用这种判别法快速看出敛散性基本就靠它了. 特别地，$p=1$ 时的级数被称为调和级数，在 $n\to\infty$ 时有公式：

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\alpha_n,\quad \alpha_n\to 0\ (n\to\infty), \tag{57}$$

其中 $\gamma\approx 0.577$ 为 Euler 常数，在 $n\to\infty$ 时也可以忽略.

2.1.4 绝对收敛与条件收敛

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，这里 a_n 可能为负，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\text{收敛} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{绝对收敛,} \tag{58}$$

反之该级数条件收敛. 两者的区别在于求和各项是否可交换（改变运算结构、顺序），这里给出两个常见级数

2.1.5 一般级数的审敛法

1. Leibniz 判别法[5]：对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 且 $a_n\geqslant 0$ 的级数，若 a_n 单调减趋于 0，则该级数收敛.
2. Dirichlet 判别法：对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的级数，若 b_n 单调减趋于 0，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和[6]有界，则该级数收敛.

[4]因为多数正项级数各项转化成函数都是难以积分或者不可积的

[5]也称交错级数判别法

[6]其部分和定义为 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

3. Abel 判别法：对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的级数，若 b_n 单调有界且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则该级数收敛.

实际上也就前两种判别法出场率高一些. Leibniz 判别法的特征相对明显，只要出现诸如 $(-1)^n$, $\cos n\pi, \sin(n+1/2)\pi$ 的因子均属于这一类；Dirichlet 判别法通常是在所有其他手段都失效的情况下考虑的，但有时候因为级数项中某部分特征非常明显，也是容易想到用这种判别法的，如 $\sin n/n$ 中的 $\sin n$ 部分和有界.

2.1.6 和函数与一致收敛

1. 和函数：对逐点收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，可定义和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. 一致收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$（即 N 与 x 取值无关），使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x). \tag{59}$$

这一定义多用于反证函数项级数逐点收敛但不一致收敛，通常可取 $x = x_n$，代入后证明两者绝对值之差有大于零的下界，如在 $(-1,1)$ 中，等比级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$，但

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xlongequal{x=1/\sqrt[n+1]{2}} \frac{1}{2\left(1-\sqrt[n+1]{2}\right)} > \frac{1}{2}. \tag{60}$$

当然，有一类简单情况容易判断非一致收敛，这一推论基于 Cauchy 收敛准则：$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛等价于对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N(\varepsilon) > 0$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$ 成立

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{61}$$

若取 $p = 1$，可得若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛，则 $a_n(x)$ 一致趋于零，其逆否命题即下一条所示推论.

3. 非一致收敛的简单判据：若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 (a,b) 内逐点收敛于 $S(x)$，且 $f_n(x)$ 在 a 点连续但 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 发散，则该级数在 (a,b) 内必定非一致收敛.
4. Weierstrass 判别法：

$$|f_n(x)| \leqslant M_n, \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{收敛} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{一致收敛}. \tag{62}$$

这是考试中函数项级数判断一致收敛唯一会考察的判别法，Dirichlet 判别法和 Abel 判别法可自动忽略.

5. (a). 绝对收敛 $\Rightarrow$ 级数可交换运算顺序/结构/优先级.
   (b). 一致收敛 $\Rightarrow$ 级数各项 $f_n(x)$ 连续/可微/可积，则级数或和函数连续/可微/可积.

2.1.7 幂级数

1. 定义：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
2. 收敛半径：$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，注意一定是前一项比后一项，其来源为比值判别法，即希望

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{63}$$

   这样即便对于形如 $(x-a)^n, x^{2n}$ 的结构，我们也能正确计算收敛半径.
3. 收敛区间：$I = (-R, R)$.
4. 收敛域：在 I 的基础上，若级数在 $x = \pm R$ 或其一上收敛，则补上端点，如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为 1，但其在 $x = -1$ 处也收敛（Libniz 判别法），因此收敛域为 $[-1, 1)$.
5. 幂级数的分析性质有

$$\text{连续性：} \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0), \tag{64}$$

$$\text{可微性：} S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \tag{65}$$

$$\text{可积性：} \int_0^x S(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{66}$$

   注意，积分后得到的级数通常收敛域可能扩大（多了 $\frac{1}{n+1}$ 的因子），微分后得到的级数通常收敛域可能缩小，但收敛区间 $I = (-R, R)$ 不变.

2.1.8 重要幂级数

1. 指数函数：$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 这是最重要的幂级数，甚至以后在后面的课程学习（如概率论中的 Poisson 分布、量子力学中算符函数的定义和不含时 Hamilton 量下的量子态幺正演化）中均会非常频繁出现，请务必理解后熟练掌握.
2. 等比级数：$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

这两种级数是我们后续计算和函数时最重要的依据.

2.1.9 和函数计算的技巧

1. 先计算收敛半径和收敛域！最后和函数的计算结果记得带上收敛域！
2. 区分 $n \to \infty$ 时，系数是无穷项相乘还是有限项相乘，前者基本只对应形如 $1/n!$ 的系数，后者以 $\prod_{i=1}^{k}(n + a_k)$ $(a_k \in \mathbb{Z})$ 的形式出现在分子或分母，如 $n(n-1), 1/n^2$.

3. 只要存在无穷项相乘，就以其为主体，即向着出现指数函数级数的方向化简，如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n-1)!}=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{(n-1)!}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x}. \tag{67}$$

当然，可能有极少数情况需要几次求导构造微分方程，例如记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x),\ S(0)=1\quad\Longrightarrow\quad S(x)=\mathrm{e}^x. \tag{68}$$

4. 若仅存在有限项相乘，通常 a_k 最多为 ±2，这时利用 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 和 $\int x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^n}{n+1}+C$，利用积分和微分依次消去系数. 若指数不足，如 x^n 对应 $1/(n+1)$，可以给 x^n 乘上一个 x 化为 x^{n+1}，然后在求和号外补足足一个 $1/x$ 因子.

2.1.10 常用 Taylor 级数

以下这些级数是我们求解 Taylor 展开题时的原型，其中的 x 可换为任意 $f(x)$.

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{69}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{70}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{71}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots,\quad x\in(-1,1), \tag{72}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-\cdots,\quad x\in(-1,1), \tag{73}$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots,\quad x\in(-1,1), \tag{74}$$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\cdots,\quad x\in(-1,1). \tag{75}$$

2.2 习题讲解

2.2.1 判断正项级数的敛散性

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+1/n)^n}$.
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1/n)^n}$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{4n}$.
9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$.
10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{1+\alpha}}$.
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.
12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}$.

解 1. $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{1}{n^{3/2}}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故原级数收敛.

2. $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\sim\dfrac{1}{2n}$，原级数发散.

3. $n\to\infty$ 时，$\sin n$ 无极限，故原级数发散.

4. $n\to\infty$ 时，$2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\sim\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，原级数收敛.

5. $n\to\infty$ 时，由于 $\sqrt[n]{n}\to1$，故 $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\dfrac{1}{n}$，原级数发散.

6. 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{2}<1$，由根值判别法，原级数收敛.

7. 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n+1/n}=0<1$，原级数收敛.

8. $n\to\infty$ 时，$\arctan\dfrac{\pi}{4n}\sim\dfrac{\pi}{4n}$，原级数发散.

9. $\alpha\leqslant0$ 时级数显然发散：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散},\ \frac{\ln^{-\alpha}n}{n}>\frac{1}{n}\quad\Longrightarrow\quad\text{原级数发散}.\tag{76}$$

当 $\alpha>0$ 时，记 $f(x)=1/x\ln^{\alpha}x$，则

$$\int_2^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=\ln x}\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{u^{\alpha-1}}\bigg|_{\ln2}^{+\infty}\quad(\alpha\neq1).\tag{77}$$

可见 $\alpha>1$ 时级数收敛，$\alpha\leqslant1$ 时级数发散（$\alpha=1$ 时积分结果为 $\ln u$，发散）. 又因为 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负、单调趋于零，故原级数与上述积分同敛散，即 $\alpha>1$ 时级数收敛，$\alpha\leqslant1$ 时级数发散.

10. 记 $f(x)=1/[x\ln x(\ln\ln x)^{1+\alpha}]$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^{1+\alpha}}=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^{1+\alpha}}=-\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{(\ln\ln x)^{\alpha}}\bigg|_3^{+\infty}\quad(\alpha\neq0).\tag{78}$$

可见 $\alpha>0$ 时级数收敛，$\alpha\leqslant0$ 时级数发散（$\alpha=0$ 时积分结果为 $\ln\ln\ln x$，发散）. 又因为 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上非负、单调趋于零，故原级数与上述积分同敛散，即 $\alpha>0$ 时级数收敛，$\alpha\leqslant0$ 时级数发散.

11. 由根值判别法，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n^2\ln\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n^2\cdot\left(-\frac{1}{2n^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}<1\end{aligned}\tag{79}$$

因此原级数收敛.

12. $n\to\infty$ 时，$\left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n=a^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=\dfrac{a^n}{\mathrm{e}}$，故原级数在 $|a|<1$ 处收敛，在 $|a|\geqslant 1$ 处发散.

2.2.2 一般数项级数的条件收敛性与绝对收敛性

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{e}^{1/n}-1)$.
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)$.
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$.
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
13. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$.
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

1. $n\to\infty$ 时，$\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n\sim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，故原级数绝对收敛，从而条件收敛.
2. 可验符号因子 $(-1)^{n(n-1)/2}=(-1)^{n-1}$，故等比级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 绝对收敛，从而条件收敛.
3. $n\to\infty$ 时，$\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，故原级数非绝对收敛，由 Leibniz 判别法知其条件收敛.
4. $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，故原级数非绝对收敛，由 Leibniz 判别法知其条件收敛.
5. n 足够大时，$\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{1}{n}$ 但单调递减趋于零，故原级数非绝对收敛，由 Leibniz 判别法知其条件收敛.
6. $n\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{1/n}-1\sim\dfrac{1}{n}$，故原级数非绝对收敛，由 Leibniz 判别法知其条件收敛.
7. $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}-\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]=\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{1}{2n^2}$，故原级数绝对收敛，从而条件收敛.
8. $n\to\infty$ 时，$1-\cos\dfrac{p}{n}\sim\dfrac{p^2}{2n^2}$，故原级数绝对收敛，从而条件收敛.
9. $n\to\infty$ 时，$\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^p=\exp\left[p\ln\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)\right]\sim\exp\left(p\ln\dfrac{1}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2^pn^{2p}}$，故绝对收敛要求 $p>1/2$，但条件收敛仅要求 $p>0$. 因此当 $p>1/2$ 时原级数绝对收敛，当 $0<p\leqslant 1/2$ 时原级数条件收敛，当 $p\leqslant 0$ 时原级数发散.
10. 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的绝对收敛性与条件收敛性也是类似的思路. 注意到 $b_n=\dfrac{1}{n}$ 非

负且单调递减趋于零，而 $\sin n$ 有限求和有界：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin k &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{k}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{n}}{1-\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left[\frac{\sin(n/2)}{\sin(1/2)}\mathrm{e}^{(n+1)/2}\right] = \frac{\sin(n/2)\sin[(n+1)/2]}{\sin(1/2)},\end{aligned} \tag{80}$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| \leqslant \frac{1\cdot 1}{\sin(1/2)} = \frac{1}{\sin(1/2)}. \tag{81}$$

另一种计算方法：

$$2\sin\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin k = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{82}$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| \leqslant \frac{1+1}{2\sin(1/2)} = \frac{1}{\sin(1/2)}. \tag{83}$$

即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 的部分和有界，由 Dirichlet 判别法，原级数收敛. 又因为

$$\frac{|\sin n|}{n} \geqslant \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{n} > 0, \tag{84}$$

类似的方法可证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛，但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故该级数发散. 综上，原级数条件收敛但非绝对收敛.

11. 同样可证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 部分和有界. 当 $n\to\infty$ 时，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\sim\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{n}}$，后者非负且单调递减趋于零，由 Dirichlet 判别法，原级数收敛，类似地可证明其条件收敛而非绝对收敛.
12. 指数对数交换：$a^{\ln n}=\mathrm{e}^{\ln n\ln a}=n^{\ln a}$，因此 $\ln a>1$ 即 $a>\mathrm{e}$ 时原级数绝对收敛，$0<a\leqslant\mathrm{e}$ 时原级数发散.
13. 联想 $\sqrt{n^2+1}\pm n$，则

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n\sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right] = (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}, \tag{85}$$

而后一项在 $n\to\infty$ 时等价于 $\dfrac{\pi}{2n}$，故原级数非绝对收敛，由 Leibniz 判别法知其条件收敛.

2.2.3 函数项级数收敛域的计算

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

解 1. 由比值判别法，希望

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n\mathrm{e}^{-nx}}\right|=\mathrm{e}^{-x}<1, \tag{86}$$

因此 $x>0$ 时原级数收敛域为 $(0,+\infty)$（$x=0$ 时原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n$）.

2. 由根值判别法，当 $x>0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n^{1/n}}=\lim_{n\to\infty}x^n. \tag{87}$$

可见当 $x>1$ 时原级数发散，当 $0<x<1$ 时原级数收敛，当 $x=1$ 时原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散. 当 $x=0$ 时，原级数为 0，显然收敛. 当 $x<0$ 时，记 $x=-y\,(y>0)$，则原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\frac{y^{n^2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{n^2}}{n}, \tag{88}$$

而 $\dfrac{y^{n^2}}{n}$ 在 $0<y\leqslant 1$ 处非负且单调减趋于零，在 $y>1$ 处其在 ∞ 处极限值非零. 由 Leibniz 判别法知其在 $0<y\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant x<0$ 处收敛. 综上，原级数收敛域为 $[-1,1)$.

3. 当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|>1$ 时，$\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n\not\to 0$，原级数发散. 这要求

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1\quad\Longleftrightarrow\quad(1-x)^2>(1+x)^2\quad\Longleftrightarrow\quad x<0. \tag{89}$$

当 $x=0$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛（Leibniz 判别法）. 当 $x>0$ 时，

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|=\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n, \tag{90}$$

而不等号右侧为等比级数项，故原级数收敛. 综上，原级数收敛域为 $[0,+\infty)$.

4. 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n}\sim\dfrac{\pi}{(2x)^n}$，因此原级数收敛域为 $1/|2x|<1$，即 $|x|>1/2$.

5. 注意到

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n!}&=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\\&\sim n\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{n}{\mathrm{e}}\quad(n\to\infty),\end{aligned} \tag{91}$$

因此当 $x>0$ 时，由根值判别法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}x=\frac{x}{e}, \tag{92}$$

因此 $x>\mathrm{e}$ 时原级数发散，$0<x<\mathrm{e}$ 时原级数收敛，$x=\mathrm{e}$ 时，原级数化为

$$n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n=\exp\left(n\cdot\ln\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)\cdot\mathrm{e}^n\sim 1, \tag{93}$$

原级数发散. 当 $x<0$ 时,记 $x=-y\,(y>0)$,则 $y<\mathrm{e}$ 处仍收敛,而 $y>\mathrm{e}$ 处 $n!\left(\frac{y}{n}\right)^n\sim\left(\frac{y}{\mathrm{e}}\right)^n$, 仍发散. $y=\mathrm{e}$ 处其等价于 $(-1)^n$，仍发散. 综上，原级数收敛域为 $(-\mathrm{e},e)$.

6. 当 $|x|>1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-1\neq 0, \tag{94}$$

原级数发散。当 $|x|<1$ 时，$\dfrac{x^n}{1-x^n}\sim x^n\ (n\to\infty)$，原级数收敛. 综上，原级数收敛域为 $(-1,1)$.

2.2.4 一致收敛性的判断

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},\ -\infty<x<+\infty.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n[1+(nx)^2]},\ -\infty<x<+\infty.$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n,\ -1<x<1.$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx},\ 0\leqslant x<+\infty.$

解 1. $\left|\dfrac{\sin nx}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

2. $\left|\dfrac{1}{2^n[1+(nx)^2]}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

3. 由非一致收敛的简单判据，$x=-1$ 时，原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ 发散，下面给出严格证明：记该等比级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\dfrac{x}{1+x}$，其部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^k=x\frac{1-(-x)^n}{1+x}\quad\Longrightarrow\quad|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{1+x},\ \forall x\in(-1,1). \tag{95}$$

取 $x_n=-1/\sqrt[n+1]{2}$，则

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2(1-1/\sqrt[n+1]{2})}>\frac{1}{2}, \tag{96}$$

因此 $|S_n(x)-S(x)|$ 不可能对于 $\forall\varepsilon>0$ 都满足 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$，从而不满足一致收敛的定义.

4. 在 $\forall[0,A]\subset[0,+\infty)$ 内，记 $f_n(x)=x^2\mathrm{e}^{-nx}\geqslant 0$，则

$$f_n'(x)=x(2-nx)\mathrm{e}^{-nx}\quad\Longrightarrow\quad f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}\frac{1}{n^2}, \tag{97}$$

而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

2.2.5 幂级数收敛半径的计算

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0,b>0)$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 1. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/n^2}{1/(n+1)^2}\right|=1$.

2. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left[\dfrac{n!}{(n+1)!}\right]^2\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(2n+1)}{n+1}=4$.

3. 希望

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^n x^{2n}}\right|=2x^2<1 \tag{98}$$

因此收敛半径 $R=1/\sqrt{2}$.

4. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/(a^n+b^n)}{1/(a^{n+1}+b^{n+1})}\right|=\max\{a,b\}$.

5. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{[3^n+(-2)^n]/n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]/(n+1)}\right|=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-2/3)^n}{1+(-2/3)^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

6. 由 Stolz 定理，

$$\begin{aligned}R&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=1.\end{aligned} \tag{99}$$

2.2.6 幂级数和函数的计算

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+1)^{n-1}}{3^n}$.
6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解 以下所有级数的和函数均记为 $S(x)$.

1. 有限项求和. 该级数收敛半径 $R=1$，且 $x=\pm1$ 时 $\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\pm\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$，级数均收敛，因此该级数的收敛域为 $[-1,1]$. 注意到

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ S(0)=0\quad\Longrightarrow\quad S(x)=\arctan x,\ x\in[-1,1]. \tag{100}$$

2. 有限项求和. 该级数收敛半径为 1，且 $x=\pm1$ 时 $n(n+1)$ 的贡献使得两者均发散，因此该级数的收敛域为 $(-1,1)$，其和函数为

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}x^{n+1}\right)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1). \tag{101}$$

3. 有限项求和. 该级数收敛半径为 1，且 $x=\pm1$ 时 $\left|\dfrac{x^n}{n(n+1)}\right|\sim\dfrac{1}{n^2}$，级数均收敛，因此该级数的收敛域为 $[-1,1]$. 记 $f(x)=xS(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\ f(0)=f'(0)=0\quad\Longrightarrow\quad f(x)=(1-x)[\ln(1-x)-1]+1, \tag{102}$$

因此原级数的和函数为

$$S(x)=\frac{1+(1-x)[\ln(1-x)-1]}{x},\quad x\in[-1,1]. \tag{103}$$

4. 无穷项求和. 该级数收敛半径为 $+\infty$，注意到

$$S'(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=1+xS(x),\quad S(0)=0, \tag{104}$$

该一阶线性微分方程的通解为

$$S(x)=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int1\cdot\mathrm{e}^{\int-x\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x^2/2}\left(\int\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x+C\right). \tag{105}$$

代入 $S(0)=0$，可解得和函数

$$S(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\int_0^x\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u=\int_0^x\mathrm{e}^{(x^2-u^2)/2}\,\mathrm{d}u\,,\quad x\in(-\infty,+\infty). \tag{106}$$

5. 有限项求和. 记 $u=(x+1)/3$，则原级数化为 $\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}$，其收敛半径为 1，且 $u=\pm1$ 时 n^2 的贡献使得两者均发散，因此该级数的收敛域为 $-1<u<1$. 注意到

$$\begin{aligned}S_u(u)&=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nu^n\right)=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u^n\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{u}{(1-u)^2}\right]=\frac{1+u}{3(1-u)^3},\end{aligned} \tag{107}$$

因此原级数的和函数为

$$S(x)=S_u\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{3(4+x)}{(2-x)^3},\quad x\in(-4,2). \tag{108}$$

6. 考虑函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)(n+1)}$，其和函数记为 $S(x)$，收敛半径为 1. 注意到

$$[xS(x)]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}\triangleq xf(x)\quad\Longrightarrow\quad f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},\ f(0)=0, \tag{109}$$

因此 $f(x)=-\ln(1-x)$，和函数为

$$\begin{aligned}S(x)&=0+\frac{1}{x}\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\int_0^x u\ln(1-u)\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{x}\,\frac{u^2}{2}\ln(1-u)\Big|_0^x-\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{u^2}{1-u}\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}\left[-\ln(1-u)-u-\frac{u^2}{2}\right]\Big|_0^x\\&=\frac{x+2}{4}-\frac{x^2-1}{2x}\ln(1-x),\end{aligned}\tag{110}$$

从而原级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}(5-6\ln 2).\tag{111}$$

7. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，其和函数记为 $S(x)$，收敛半径为 1，首先有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+1]x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}+\frac{1}{1-x}.\tag{112}$$

记 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$，则

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^3}.\tag{113}$$

因此原级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}f\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.\tag{114}$$

8. 注意到 $(-1)^n=[(-1)^3]^n=(-1)^{3n}$，因此考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{3n+1}$，其和函数记为 $S(x)$，收敛半径为 1，且 $x=-1$ 时级数收敛（Leibniz 判别法）. 注意到

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\triangleq\frac{f(x)}{x}\quad\Longrightarrow\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3},\ f(0)=0,\tag{115}$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1-u^3}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u+u^2)}\\&=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{1-u}+\frac{2+u}{1+u+u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{3}\left[-\ln(1-u)+\frac{1}{2}\ln\left(1+u+u^2\right)+\sqrt{3}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]\Big|_0^x\\&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right].\end{aligned}\tag{116}$$

从而原级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=S(-1)=-f(-1)=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).\tag{117}$$

9. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}x^n$，起和函数记为 $S(x)$，收敛半径为 $+\infty$. 注意到

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\mathrm{e}^x)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(x+1)\mathrm{e}^x]=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x,\end{aligned}\tag{118}$$

因此原级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=S(1)=5\mathrm{e}.\tag{119}$$

10. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$，其和函数记为 $S(x)$，收敛半径为 $+\infty$. 注意到

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x^2},\tag{120}$$

因此原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=S(1)=1.\tag{121}$$

2.2.7 Taylor 级数

1. $\mathrm{e}^{x/a}$ $(x=a)$.
2. $\ln x$ $(x=1)$.
3. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ $(x=-4)$.
4. $\ln\left(1+x-2x^2\right)$ $(x=0)$.
5. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $(x=0)$.
6. $(1+x)\ln(1+x)$ $(x=0)$.
7. $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ $(x=0)$.
8. $\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ $(x=0)$.

解 1. $\mathrm{e}^{x/a}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{(x-a)/a}=\mathrm{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{a^n n!}$.

2. $\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

3. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(x+4)/2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-(x+4/3)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$.

4. $\ln\left(1+x-2x^2\right)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-2)^n}{n}x^n$.

5. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

6. 记 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，则

$$f'(x)=1+\ln(1+x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,f(0)=0\quad\Longrightarrow\quad f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}.\tag{122}$$

注 原则上遇到含 ln 项且难以展开的函数，都可以试试求导后展开再积分回去的方法，可以用这种方法试着解前两题.

7. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2(2n)!}.$
8. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x u^{2n}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$

2.3 综合练习

1. 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.
2. 证明：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1.$
3. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.
4. 设 $f \in C[a,b]$，且 $F_0(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$，$F_n(x) = \displaystyle\int_a^x F_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u$，其中 $x \in [a,b]$，$n \in \mathbb{N}^*$.
   (a). 证明：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
   (b). 设 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ $(a<x<b)$，证明：$S'(x) - S(x) = f(x)$，$S(a) = 0$.
   (c). 用 $f(x)$ 表示 $S(x)$.

解 1. 可交换求和顺序：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{123}$$

最后一步的结果实际上应在 Fourier 级数那一章会频繁出现，这里如果要计算的话，可以考虑函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的和函数 $S(x)$，得到 $S(x)$ 后计算 $S(1)$ 即可.

2. 改变运算结构：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right) = 1.\end{aligned} \tag{124}$$

3. (a). 充分性：若 $\{a_n\}$ 有界，则结合 $\{a_n\}$ 单调递增的条件，该数列存在极限 $A>0$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1) = A - a_1 \tag{125}$$

收敛，而 $1/a_n$ 单调递减且以 A 为下界，由 Abel 判别法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

(b). 必要性：记 $b_n = a_{n+1}/a_n - 1$，则由题意，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于 $B > 0$，从而

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} = \prod_{k=1}^{n}(1+b_k) = \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+b_k)\right] \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \exp(B), \tag{126}$$

即 $0 \leqslant a_n \leqslant a_1 \mathrm{e}^B$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$，故 $\{a_n\}$ 有界.

4. (a). 由于 $f \in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$，可利用完全归纳法证明：$|F_n(x)| \leqslant \dfrac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. 当 $n = 0$ 时，

$$|F_0(x)| \leqslant \int_a^x |f(u)\,\mathrm{d}u| = M(x-a). \tag{127}$$

假定结论当 $n = k$ 时成立，则 $n = k+1$ 时，

$$|F_{k+1}(x)| \leqslant \int_a^x |F_k(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{M}{(k+1)!}\int_a^x (u-a)^{k+1}\,\mathrm{d}u = \frac{M}{(k+2)!}(x-a)^{k+2}, \tag{128}$$

可见结论成立，从而

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \tag{129}$$

而数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = M(\mathrm{e}^{b-a}-1)$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知原级数 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ 一致收敛.

(b). 由 $F_n(x)$ 定义，

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n'(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} F(x) = f(x) + S(x), \tag{130}$$

因此 $S'(x) - S(x) = f(x)$，初值为 $S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) = 0$.

(c). 上一问中得到了一阶线性微分方程，其通解为

$$S(x) = \exp\left(\int \mathrm{d}x\right)\left[\int f(x)\exp\left(\int -\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^x\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + C\right). \tag{131}$$

代入 $S(a) = 0$ 得

$$S(a) = \mathrm{e}^a(0 + C) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0, \tag{132}$$

因此

$$S(x) = \mathrm{e}^x \int_a^x f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_a^x f(u)\mathrm{e}^{x-u}\,\mathrm{d}u\,, \quad x \in [a,b]. \tag{133}$$