数学分析 B2 历年真题解

邓嘉驹

更新：June 25, 2025

目录

1 期中考试 **2**

1.1 2023-2024 年期中 2

2 期末考试 **3**

2.1 2023-2024 期末 3

2.2 2022-2023 期末 9

2.3 2021-2022 期末 14

2.4 2020-2021 期末 18

2.5 2019-2020 期末 23

2.6 2018-2019 期末 28

2.7 2017-2018 期末 31

2.8 2016-2017 期末 35

2.9 2015-2016 期末 40

2.10 2013-2014 期末 43

2.11 2012-2013 期末 46

1 期中考试

1.1 2023-2024 年期中

1. (1) 求函数 $u=xyz$ 在点 $(1,2,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{e}=(2,-1,1)$ 的方向导数.

   (2) 求过直线 $l=\begin{cases}2x+y-z-2=0,\\ 3x-2y-2z+1=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi:3x+2y+3z-9=0$ 垂直的平面方程.

   解 对于此交面式直线方程，可设绕该定直线的平面系方程为

   $$\pi':(2+3\lambda)x+(1-2\lambda)-(1+2\lambda)z+(\lambda-2)=0, \tag{1.1.1}$$

   因此 π' 与 π 垂直给出

   $$0=(2+3\lambda,1-2\lambda,-1-2\lambda)\cdot(3,2,3)=5-\lambda \quad\Longrightarrow\quad \lambda=5, \tag{1.1.2}$$

   因此该平面方程为

   $$\pi':17x-9y-11z+3=0. \tag{1.1.3}$$

   (3) 设函数 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，$f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=a$ 且 $f'_y(1,1)=b$，求函数 $u(x)=f(x,f(x,x))$ 在 $x=1$ 处的微分.

   (4) 求 $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi x\cos xy\,\mathrm{d}x$.

   (5) 已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(yz,y-x)=0$ 所确定的隐函数，其中 f 具有连续的一阶偏导数，且 $f'_1(yz,y-x)\neq 0$，求 $\partial z/\partial x$ 和 $\partial z/\partial y$.

   (6) 计算 $\displaystyle\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$.

   解 注意到 D 关于 y 对称，而 $xy/(1+x^2+y^2)$ 关于 y 为奇函数，故该项积分值为零. 剩余积分仍考虑半球面的等值面，因此

   $$\text{原式}=\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{1.1.4}$$

   (7) $I=[1,2]\times[3,4]$ 上有连续二阶偏导数，求积分 $I=\displaystyle\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2 期末考试

2.1 2023-2024 期末

1. (1) 设 $f(x)=1-x/\pi\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的余弦级数的和函数为 $S(x)$，求 $S(-3),\ S(12)$.

   解 可将 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上作偶延拓，再将 $[-\pi,\pi]$ 上的结果在 $\mathbb{R}$ 上作周期延拓. 由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上分段可微，从而延拓后同样分段可微，那么

   $$S(-3)=S(3)=1-\frac{3}{\pi},\quad S(12)=S(12-4\pi)=S(4\pi-12)=\frac{12}{\pi}-3. \tag{2.1.1}$$

   (2) 计算曲线积分 $I=\displaystyle\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s$，其中 $L:x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi$.

   解 由题意，

   $$I=\int_0^\pi\sqrt{1-\cos t}\cdot\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^\pi(1-\cos t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\pi. \tag{2.1.2}$$

   (3) 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$，这里 S 是螺旋面 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,v)$，其中 $0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

   解 计算面元：

   $$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=(\sin v,-\cos v,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{d}S=\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,, \tag{2.1.3}$$

   因此

   $$\text{原式}=\int_0^{2\pi}v\,\mathrm{d}v\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\pi^2\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]. \tag{2.1.4}$$

   (4) 计算

   $$\iint_\Omega(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.1.5}$$

   其中 Ω 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧.

   解 考虑正向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=0\}$，其方向沿 z 轴正方向，那么 $\Omega+D^-$ 构成方向向外的闭曲面，由 Gauss 定理，

   $$\begin{aligned}&\iint_{\Omega+D^-}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&3\iiint_{0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\pi R^3.\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

   另一方面，

   $$\iint_D(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\pi R^2, \tag{2.1.7}$$

   因此

   $$\text{原式}=\iint_{\Omega+D+D^-}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi R^3+3\pi R^2. \tag{2.1.8}$$

(5) 计算 $\oint_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=9$ 与 $x+z=0$ 的交线，从 z 轴往负向看 L 为逆时针方向.

解 取曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 上被曲线 L 所包围的部分，则由 Stoke 定理，

$$\text{原式} = \iint_S (-1,-1,-1)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (-1,-1,-1)\cdot\frac{(x,y,z)}{3}\,\mathrm{d}S = -\frac{1}{3}\iint_S (x+z)\,\mathrm{d}S\,, \tag{2.1.9}$$

其中最后一个等式用到了曲面 S 关于 y 的对称性. 考虑正交变换 $\begin{cases} u=(x+z)/\sqrt{2}, \\ v=(x-z)/\sqrt{2}, \\ w=y, \end{cases}$ 则 $u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2=9$，面元 $\mathrm{d}S$ 变为 S 上的面元，此时

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\iint_{u^2+v^2+w^2=9,\ u\geqslant 0} u\,\mathrm{d}S \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 3^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -9\sqrt{2}\pi. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

(6) 设 $f(x)$ 可微且具有连续的导数，$F(x)=\int_0^x\left[\int_0^t uf(u^2+t^2)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$，求 $F''(x)$.

解 由题意，

$$F'(x) = \int_0^x uf(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u\,, \tag{2.1.11}$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= xf(2x^2) + \int_0^x 2xuf'(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u \\ &= xf(2x^2) + x\cdot f(u^2+x^2)\Big|_{u=0}^{u=x} = x[2f(2x^2)-f(x^2)]. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

(7) 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 由题意，

$$I \xlongequal[(x\geqslant 0)]{u=x^4} \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{u^{-3/4}}{1+u} = \frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \tag{2.1.13}$$

其中最后一行已用到余元公式.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}(\pi-1)x/2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ (\pi-x)/2, & 1\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$ 试将函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开成正弦级数并指出其收敛性，并由此证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$.

解 先将 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上作奇延拓，由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $a_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \left(1-\frac{1}{\pi}\right)\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_1^{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \left(1-\frac{1}{\pi}\right)\left(-\frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2}\right) + \left[\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2\pi}\right] = \frac{\sin n}{n^2}, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

注意到 $f(\pi^-)=f(-\pi^+)=0$，因此在 $[-\pi,\pi]$ 上，奇延拓后的 $f(x)$ 满足

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{2.1.15}$$

由 Parseval 等式，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{(\pi-1)^2}{4}x^2\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\frac{(\pi-x)^2}{4}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(\pi-1)^2}{6\pi}[1+(\pi-1)]=\frac{(\pi-1)^2}{6}.\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

3. 证明向量场 $\boldsymbol{v}(x^2,yz,y^2/2)$ 是全空间的有势场，并求其势函数.

解 由题意，

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=(y-y,0-0,0-0)=0, \tag{2.1.17}$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 为有势场，其势函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\varphi(0,0,0)+\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\varphi(0,0,0)+\int_0^x u^2\,\mathrm{d}u+\int_0^y 0\,\mathrm{d}v+\int_0^z\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}w\\&=\varphi(0,0,0)+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2z}{2}.\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

4. 设广义积分为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\mathrm{d}x\quad(p>0), \tag{2.1.19}$$

请分别指出并证明该广义积分绝对收敛和条件收敛时参数 p 的取值范围.

解 记 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$，$g(x,p)=(1+1/x)^x/x^p$. 首先注意到当 $p>0$ 时，对 $\forall M>1$，

$$\left|\int_1^M f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\mathrm{e}^{\sin M}-\mathrm{e}^{\sin 1}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\sin 1}, \tag{2.1.20}$$

即该积分对 $\forall p>0$ 一致有界，并且对于任一固定的 $p>0$，

$$gx=\frac{(1+1/x)^x}{x^{p+1}}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+\frac{1}{x+1}-(1+p)\right]. \tag{2.1.21}$$

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$(1+1/x)^x\in[2,\mathrm{e})$ 且关于 x 单调增，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x,p)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}/x^p=0$，并且当 $x\geqslant\max\{1,1/p-1\}$ 时，

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]+\left(\frac{1}{x+1}-p\right)<0\quad\Longrightarrow\quad g_x<0, \tag{2.1.22}$$

即 $g(x,p)$ 关于 x 单调且一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法，该广义积分收敛.

(1) 当 $p>1$ 时，

$$|f(x)g(x,p)|<\frac{\mathrm{e}}{x^p}\cdot\mathrm{e}\quad\text{and}\quad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^2}{x^p}=\frac{1}{p-1}\text{收敛} \tag{2.1.23}$$

由 Weierstrass 判别法，该广义积分绝对收敛.

(2) 当 $p=1$ 时，$|f(x)g(x,1)|>2\mathrm{e}^{-1}|\cos x|/x$，并且

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x&>\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{积分第一}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n}>\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n},\end{aligned}\tag{2.1.24}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故 $\int_1^{+\infty}|f(x)g(x,1)|\,\mathrm{d}x$ 发散，该广义积分条件收敛.

(3) 当 $0<p<1$ 时，由于 $|f(x)g(x,p)|<|f(x)g(x,1)|$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上成立，而后者在 $[1,+\infty)$ 上的积分发散，故 $\int_1^{+\infty}|f(x)g(x,p)|\,\mathrm{d}x$ 发散，该广义积分条件收敛.

综上，该广义积分在 $p>1$ 时绝对收敛，在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

5. 计算

$$I=\oint_L\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2},\tag{2.1.25}$$

其中 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

解 这类题相当套路化，特征是分母形式为 $a^2x^2+b^2y^2$，L 所包围的区域含该形式的奇点，即原点 $(0,0)$. 这里取分母的正向等值线 $C:x^2+4y^2=r^2\leqslant 1$，那么

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}&=\frac{1}{r^2}\oint_C(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{Green 公式}}\frac{2}{r^2}\iint_{x^2+4y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=\pi.\end{aligned}\tag{2.1.26}$$

在 L 与 C 所包围的区域内使用 Green 公式：

$$\oint_{L+C^-}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_D\left[\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}-\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\tag{2.1.27}$$

因此

$$I=\oint_{L+C^-+C}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)}{x^2+4y^2}=0+\pi=\pi.\tag{2.1.28}$$

6. 设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在三维空间上有连续偏导数，记上半球面

$$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},\tag{2.1.29}$$

其方向向上. 若对任意点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$，第二型曲面积分为 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，求证：$\partial P/\partial x=0$.

解 考虑正向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=0\}$，其方向沿 z 轴负方向，那么 $\Omega+D$ 构成方向向外的闭曲面，其包围的区域记为 Ω. 由 Gauss 定理，

$$\iint_{S+D}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(P_x+R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\tag{2.1.30}$$

另一方面，

$$\iint_D P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.1.31}$$

由题意，

$$\iiint_\Omega (P_x + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 + \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.1.32}$$

由积分中值定理，$\exists(\xi_1,\eta_1,\zeta)\in\Omega$ 且 $\exists(\xi_2,\eta_2)\in D$，使得

$$(P_x+R_z)\Big|_{(\xi_1,\eta_1,\zeta)}\cdot\frac{2\pi r^3}{3} = R(\xi_2,\eta_2,z_0)\cdot\pi r^2 \tag{2.1.33}$$

$$\Longrightarrow\quad R(\xi_2,\eta_2,z_0) = \frac{2r}{3}\,(P_x+R_z)\Big|_{(\xi_1,\eta_1,\zeta)}\,. \tag{2.1.34}$$

由于 r 的选择任意，令上式两端 $r\to 0^+$. 又因为 R 具有连续偏导数，故 $R(x_0,y_0,z_0)=0$. 注意到 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的选择也是任意的，从而对于 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，$R(x,y,z)\equiv 0$. 将其代回上式，可得

$$P_x(\xi_1,\eta_1,\zeta)=0 \quad\xrightarrow{r\to0^+}\quad P_x(x_0,y_0,z_0)=0, \tag{2.1.35}$$

其中已用到 P 具有连续偏导数的条件. 再结合 P_0 的任意性，可知对于 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，$P_x(x,y,z)\equiv 0$.

7. 设 $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $t>0$.

   (1) 求证：对于任何的 $T>0$，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,T]$ 上一致收敛.

   (2) 求证：对任意的 $t>0$，有

$$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{\pi}{2}\ln t. \tag{2.1.36}$$

解 在正式解题之前，先说明若要证明对于形如 $\ln p_m(x)/p_n(x)$ 型函数的广义积分收敛，其解法是十分套路化的，这里 $p_m(x),p_n(x)$ 分别为关于 x 的 m,n 次多项式函数. 在 $[0,x_0]$ 上，若 $p_m(x)=1+xp_{m-1}(x)$，直接利用 $x\to0^+$ 时的等价无穷小 $\ln p_m(x)\sim xp_{m-1}(x)$ 即可；若 $p_m(x)=xp_{m-1}(x)$，利用

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln p_m(x)=0\quad(\forall\alpha>0), \tag{2.1.37}$$

取 α 满足另一函数收敛即可. 在 $[x_0,+\infty)$ 上，利用

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln p_m(x)}{x^\beta}=0\quad(\forall\beta>0), \tag{2.1.38}$$

取 β 满足另一函数收敛即可.

(1) 对于 $\forall t\in(0,T]$，显然该广义积分在 $x=0$ 处无奇点. 记 $f(x,t)=\ln(1+tx)/\sqrt{x}\leqslant f(x,T)$，$g(x)=\sqrt{x}/(1+x^2)$，则 $\displaystyle\int_1^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ 的敛散性相同，而后者收敛. 并且

$$f_x(x,T)=\frac{2x-(1+Tx)\ln(1+Tx)}{2(1+Tx)x^{3/2}}<0 \tag{2.1.39}$$

在 $x>(\mathrm{e}^{2/T}-1)/T$ 时成立，即 $f(x,T)$ 关于 x 单调递减，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,T)=\lim_{x\to 0^+} T\sqrt{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x,T)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2T\sqrt{x}}{1+Tx}=0, \tag{2.1.40}$$

因此 $f(x,T)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 由 Abel 判别法，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,T)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法，该广义积分在 $t\in(0,T]$ 上一致收敛.

(2) 感谢王艺锟同学提供的简便解法！由上一问的结论，对 $\forall t>0$，总 $\exists T,T'>0$，使得当 $1/T'\leqslant t\leqslant T$ 时，$\varphi(t),\varphi(1/t)$ 均一致收敛，因此

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x/t)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=1/x}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+1/tu)}{1+1/u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+1/tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)-\ln(1+1/tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=1/x}\frac{\pi}{2}t-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

将上式最后一行的两个等式相加，可得当 $1/T'\leqslant t\leqslant T$ 时，

$$\varphi(t)-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}t. \tag{2.1.43}$$

由 t 的任意性，上式对 $\forall t>0$ 成立.

2.2 2022-2023 期末

1. (1) 计算 $I=\displaystyle\int_L \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=\sqrt{2x-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，方向为 x 增加的方向.

   解 对于任意闭区域 D，由 Green 公式，

   $$\oint_{\partial D}\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y=\iint_D (y-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0. \tag{2.2.1}$$

   注意到路径 L 的初末态分别为 $A(0,0)$ 和 $B(1,1)$，记同初末态且沿线段 AB 的路径为 L_0，L 与 L_0 围成的区域记为 D_0，则

   $$I=\int_{L+L_0^-+L_0}\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y=\int_{L_0}\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}+t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}. \tag{2.2.2}$$

   (2) 求曲面积分 $I=\displaystyle\iint_\Sigma 4zx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2\ (0\leqslant z\leqslant 2)$，方向取下侧.

   解 记有向平面区域 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 2,\ z=2\}$，其方向沿 z 轴负向，则 $\Sigma+D^-$ 围成一闭区域 Ω. 由 Gauss 定理，

   $$\begin{aligned} I&=\iint_{\Sigma+D^-+D}4zx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\iiint_\Omega 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_D(1-2^2)(-\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)=3\cdot\pi\cdot 2=6\pi. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

   (3) 求极限：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

   解 利用 Euler 积分和余元公式，

   $$\begin{aligned} \text{原式}&\xlongequal{u=x^n}\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{u^{1/n-1}}{n}\,\mathrm{d}u=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\Gamma(1-1/n)\sin(\pi/n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1-1/n)}=\frac{1}{\Gamma(1)}=1. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

2. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛于及和函数.

   解 由题意，该幂级数收敛时满足

   $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2(n+1)}/(2n+1)}{(-1)^n(2x)^{2n}/(2n-1)}\right|=(2x)^2<1\quad\Longrightarrow\quad|x|<\frac{1}{2}. \tag{2.2.5}$$

   记其和函数为 $S(x)=xf(x)$，则当 $|x|<1/2$ 时，

   $$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{2n}x^{2n-2}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-4x^2)^{n-1}=\frac{4}{1+4x^2}, \tag{2.2.6}$$

   利用 $f(0)=0$ 可得

   $$f(x)=2\arctan 2x\quad\Longrightarrow\quad S(x)=2x\arctan 2x,\quad |x|<\frac{1}{2}. \tag{2.2.7}$$

3. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \pi+x, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 的值.

解 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内连续且分段可微，结合其偶函数性质可得 Fourier 系数：$b_n=0$ 且

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,\mathrm{d}x=\pi,\qquad(2.2.8)\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{n\pi}\left[(\pi-x)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right]\\ &=\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n],\qquad(2.2.9)\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 收敛于其 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad |x|\leqslant\pi.\qquad(2.2.10)$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.\qquad(2.2.11)$$

另一方面，

$$g(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^2-(\pi-x)^2}{2},\qquad(2.2.12)$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{g(\pi/2)-\pi^2/4}{4/\pi}=\frac{\pi^3}{32}.\qquad(2.2.13)$$

4. 利用 Dirichlet 积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 来计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad(2.2.14)$$

其中 $0<a<b$.

解 记 $f(x,a)=\sin(ax)\sin(bx)/x^2$，由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x,a)=ab$，故 $x=0$ 并非 $f(x,a)$ 的奇点. 又因为 $|f(x,a)|\leqslant1/x^2$，而 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$g(a)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x,a)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\forall a\in[0,b)$ 一致收敛，并且

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin(b+a)x}{x}+\frac{\sin(b-a)x}{x}\right]\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\qquad(2.2.15)\end{aligned}$$

收敛，其中已利用 Dirichlet 积分以及 $0<a<b$，因此

$$g'(a)=\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad g(a)=g(0^+)+\frac{\pi}{2}a=\frac{\pi}{2}a. \tag{2.2.16}$$

5. 已知函数项级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^x}$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

(2) 证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

解 (1) 记级数每一项为 $u_n(x)=\sin(nx/n^x)$，则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|u_n(x)|\geqslant\left|u_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|=\frac{1}{(n^{1/n})^{2\pi}}. \tag{2.2.17}$$

注意到 $n\gg\ln n$ $(n\to\infty)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln n/n}=1\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}|u_n(x)|\neq 0, \tag{2.2.18}$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛.

(2) 对 $\forall x>0$，当 $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ 时，总 $\exists 0<x_0<x$，当 $x\in[x_0,+\infty)$ 时[1]，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)\right|&=\left|\frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|\\&=\left|\frac{\cos(x/2)-\cos[(N+1/2)x]}{2\sin(x/2)}\right|=\left|\frac{\sin(Nx)\sin(N+1)x}{\sin(x/2)}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin x_0|},\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

即该部分和一致有界，并且 $1/n^x$ 单调递减，由 Dirichlet 判别法，$f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 内一致收敛，从而 $f(x)$ 在点 x 处连续. 由于 $x\in(0,+\infty)$ 的任意性，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

6. 设

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+tx)}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\quad(t\geqslant 0). \tag{2.2.21}$$

(1) 证明：$\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

(2) 计算 $\varphi(1)$ 的值.

解 (1) 记 $f(x,t)=\ln(1+tx)/x(x+1)$，对 $\forall t>0$，均 $\exists T>t$，使得 $0\leqslant f(x,t)\leqslant f(x,T)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上成立. 首先 $x=0$ 并非 $f(x,t)$ 的奇点，那么考虑其在 $[1,+\infty)$ 内的积分. 易知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$ 收敛，并且当 $x>x_0=(\mathrm{e}^{2/T}-1)/T$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\ln(1+Tx)}{\sqrt{x}}\right]=\frac{x[2-T\ln(1+Tx)]-\ln(1+Tx)}{2(1+Tx)x^{3/2}}<0, \tag{2.2.22}$$

[1]也可以利用 Euler 公式转化为

$$\mathrm{Im}\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\mathrm{Im}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\mathrm{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx/2}\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)}=\sin\frac{Nx}{2}\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)} \tag{2.2.19}$$

另一方面有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+Tx)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}T\sqrt{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+Tx)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2T\sqrt{x}}{1+Tx}=0, \tag{2.2.23}$$

因此该函数在 $[x_0,+\infty)$ 内有界. 由 Abel 判别法，广义积分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x,T)\,\mathrm{d}x$ 一致收敛. 由 Weierstrass 判别法，广义积分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,T]$ 内收敛，同时

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+tx)(1+x)}\\&=\int_0^\infty\left(\frac{t}{1+tx}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{t-1}\\&=\frac{1}{t-1}\ln\frac{1+tx}{1+x}\bigg|_0^\infty=\frac{\ln t}{t-1}\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

收敛，并且上述积分值在 $t\to 1$ 时的极限为 1，因此

$$\varphi'(t)=\frac{\ln t}{t-1} \tag{2.2.25}$$

在 $t>0$ 上连续.

(2) 由上一小问的结论，

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\int_0^1\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t\xlongequal{u=1-t}-\left(\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^1\right)\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u, \tag{2.2.26}$$

其中 $0<\varepsilon<1$. 当 $u<1$ 时，函数 $\ln(1-u)$ 收敛于其 Taylor 级数，因此

$$-\int_0^\varepsilon\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=-\int_0^\varepsilon\frac{1}{u}\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-u)^n\,\mathrm{d}u=\int_0^\varepsilon\sum_{n=1}^\infty\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u, \tag{2.2.27}$$

此时幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{u^{n-1}}{n}$ 的收敛半径为 1，因此当 $0\leqslant u\leqslant\varepsilon<1$ 时，无穷求和与积分可交换，即

$$-\int_0^\varepsilon\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\varepsilon\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon^n}{n^2}. \tag{2.2.28}$$

积分后，幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon^n}{n^2}$ 的收敛区间为 $[-1,1]$，因此

$$-\lim_{\varepsilon\to 1^-}\int_\varepsilon^1\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=\lim_{\varepsilon\to 1^-}\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon^n}{n^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.2.29}$$

另一方面，记 $g(u)=-\sqrt{1-u}\ln(1-u)$, $h(u)=1/u\sqrt{1-u}$，首先有

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 h(u)\,\mathrm{d}u&=-\frac{2\sqrt{1-u}}{u}\bigg|_\varepsilon^1-2\int_\varepsilon^1\frac{\sqrt{1-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon}-2\int_\varepsilon^1\frac{\sqrt{1-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u\text{ 收敛},\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

并且

$$g'(u)=\frac{\ln(1-u)+2}{2\sqrt{1-u}}<0 \tag{2.2.31}$$

在 $u>u_0=\max\{1-\mathrm{e}^{-2},\varepsilon\}$ 时成立，$\lim\limits_{u\to1^-}g(u)=0$，因此 $g(u)$ 在 $[u_0,1]$ 内单调且有界. 由 Dirichlet 判别法，广义积分 $\int_\varepsilon^1 g(u)h(u)\,\mathrm{d}u$ 收敛于某一与 ε 有关的常数，从而

$$-\lim_{\varepsilon\to1^-}\int_\varepsilon^1\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=0. \tag{2.2.32}$$

综上，

$$\varphi(1)=-\lim_{\varepsilon\to1^-}\left(\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^1\right)\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{6}+0=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.2.33}$$

7. 设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围城的区域，$f(x,y)$ 在 D 上具有连续的偏导数. 记 $d=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}$.

(1) 证明：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L xf(x,y)\,\mathrm{d}y-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.2.34}$$

(2) 对于 $\forall(x,y)\in L$，均有 $f(x,y)=0$. 证明：

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant d^2\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma\,. \tag{2.2.35}$$

解 (1) 由 Green 公式，

$$\oint_L xf(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left[f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.2.36}$$

(2) 仿照上一问的思路，可证明对偶表达式：

$$\oint_L -yf(x,y)\,\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.2.37}$$

将这两式中的 f 替换为 f^2 并相加，代入 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零的条件，可得

$$\begin{aligned}\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma&=-\iint_D f\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D|f|\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\iint_D|f|\sqrt{(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\left\{\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\cdot\iint_D(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma\right\}^{1/2},\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

其中最后两行均使用到了 Cauchy-Schwarz 不等式，代入 $x^2+y^2\leqslant d^2$ 得

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant d^2\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma\,. \tag{2.2.39}$$

2.3 2021-2022 期末

1. 求 $\Gamma(5/2)$.

   解 $\Gamma(5/2)=3/2\cdot 1/2\cdot\Gamma(1/2)=3\sqrt{\pi}/4$.

2. 求函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\sin 2x/3$ $(x\in[-\pi,\pi])$ 的 Fourier 系数.

   解 注意到 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x/3$，因此 $a_2=1$, $b_2=1/3$，其余 $a_n=b_n=0$.

3. 求向量场 $\boldsymbol{v}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ 沿曲线

$$L:\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\sin t,t),\quad t\in[0,2\pi] \tag{2.3.1}$$

   的积分，其中 t 是曲线的正向参数.

   解 注意到对于空间中任一闭合曲线 L_0 及任一以 L_0 为边界的有向曲面 S，由 Stokes 公式，

$$\oint_{L_0}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0, \tag{2.3.2}$$

   因此 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 L 的第二型曲线积分与路径无关，而 L 的初末位置分别为 $A(1,0,0)$ 和 $B(1,0,2\pi)$，考虑从 A 到 B 的直线段，从而

$$\int_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}(x+y)\Big|_{(1,0,z)}\mathrm{d}z=2\pi. \tag{2.3.3}$$

4. 求函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & 1\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为Fourier级数，由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

   解 注意到 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内为偶函数且分段可微，由 Dirichlet 定理，$f(x)$ 在该区间上的 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}, \tag{2.3.4}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin n}{n\pi}, \tag{2.3.5}$$

   因此

$$\frac{1}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\right)=\begin{cases}1/2, & |x|=1,\\ f(x), & \text{elsewhere}\end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi f(0)-1}{2}=\frac{\pi-1}{2}. \tag{2.3.7}$$

   由 Parseval 等式，

$$\frac{2}{\pi^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}. \tag{2.3.8}$$

5. 求向量场 $\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}+zx^2\boldsymbol{k}$ 在球面 $S:x^2+y^2+z^2=z$ 的积分，曲面 S 的正向是外法向.

解 记闭曲面 S 包围的区域为 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1/2)^2\leqslant 1/4\}$，由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\&=\iiint_\Omega\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}V\\&=\iiint_\Omega\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\frac{1}{4}\iiint_\Omega \mathrm{d}V\\&=4\pi\int_0^{1/2} r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{15},\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

其中第三行已利用 Ω 关于 $(z-1/2)$ 对称的特性.

6. 设常数 a,b 都是正实数，平面向量场 $\boldsymbol{b}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{a^2x^2+b^2y^2}$.

(1) 求 $\boldsymbol{v}$ 在 $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0\}$ 的所有势函数.

(2) 证明 $\boldsymbol{v}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2>0\}$ 上的保守（有势）场.

解 (1) D_1 为单连通区域，对于 D_1 内任一闭区域 D，由 Green 公式，

$$\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{\partial D}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{a^2x^2+b^2y^2}=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\tag{2.3.10}$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 在 D_1 内为有势场，其势函数为

$$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+\int_0^x 0\,\mathrm{d}u+\int_0^y\frac{x\,\mathrm{d}v}{a^2x^2+b^2v^2}=\varphi(0,0)+\frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}.\tag{2.3.11}$$

(2) D_2 并非单连通区域，考虑正向闭路 $C(R):a^2x^2+b^2y^2=R^2\ (R>0)$，容易计算

$$\begin{aligned}\oint_{C(R)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\oint_{C(R)}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{a^2x^2+b^2y^2}=\frac{1}{R^2}\oint_{C(R)}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal[y=R\sin\theta/b]{x=R\cos\theta/a}\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{ab}\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{ab}.\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

而对于 D_2 内任一包含原点的区域 D，总 $\exists R>0$，使得 $C(R)$ 在 D 内. 记 ∂D 与 $C(R)$ 所包围的区域为 $D(R)$，由 Green 公式，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\oint_{\partial D+C(R)^-+C(R)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\iint_{D(R)}(\partial_x v_y-\partial_y v_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oint_{C(R)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0+\frac{2\pi}{ab},\end{aligned}\tag{2.3.13}$$

可见对于 D_2 内的任一路径 L，总可以构造另一与其同初末态的路径 L'，使得 L 与 L' 围成的区域 D 包含原点，从而 $\boldsymbol{v}$ 沿路径 L 和 L' 的第二型曲线积分值相差 $2\pi/ab$，即积分值与路径有关，因此 $\boldsymbol{v}$ 不是 D_2 上的保守场.

7. 证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛，并求其值.

解 考虑含参变量的反常积分

$$g(t)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad f(x,t)=\frac{\ln\left(1+tx^2\right)}{1+x^2}\ (0\leqslant t\leqslant 5). \tag{2.3.14}$$

由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ 同敛散且后者收敛，同时

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\ln\left(1+5x^2\right)}{1+tx^2}\right]=\frac{1}{2x^{3/2}}\left[\frac{20x^2}{1+tx^2}-\ln\left(1+5x^2\right)\right]<0 \tag{2.3.15}$$

对 $\forall x\in((\mathrm{e}^4-1)/5,+\infty)$ 成立，并且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+5x^2\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+5x^2\right)}{\sqrt{x}}=0, \tag{2.3.16}$$

因此该函数在 $((\mathrm{e}^4-1)/5,+\infty)$ 上单调且一致有界，由 Abel 判别法，$g(5)$ 收敛. 又因为 $|f(x,t)|\leqslant|f(x,5)|$，由 Weierstrass 判别法，$g(t)$ 在 $[0,5]$ 上一致收敛. 另一方面，

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+tx^2)(1+x^2)}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+tx^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{t-1}\\&=\frac{1}{t-1}\left[\arctan x-\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\left(\sqrt{t}x\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)}\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

在 $t\in(0,5)$ 上收敛，因此 $g(t)$ 可微，且

$$g'(t)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t}+1}\right), \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned}g(4)&=g(0)+\frac{\pi}{2}\int_0^4\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t}+1}\right)\overset{u=\sqrt{t}}{=\!=\!=}2\pi-\frac{\pi}{2}\int_0^2\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}\\&=2\pi-\pi\left[u-\ln(1+u)\right]\Big|_0^2=2\pi-\pi(2-\ln 3)=\pi\ln 3.\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

8. 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有二阶连续偏导数，并且对任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=f(P_0), \tag{2.3.20}$$

其中 S 是以 P_0 为球心、r 为半径的球面. 求证：f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{2.3.21}$$

解 感谢王艺锟同学提供的简便解法！记点 $P(x,y,y)$ 为 S 球面 S 上任一点，则 $\overrightarrow{P_0P}=r\hat{\boldsymbol{r}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为单位径矢，恰为球面法向，因此在球坐标下，

$$\frac{\partial f(P)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}f(P_0+r\hat{\boldsymbol{r}})=\nabla f(P)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{2.3.22}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 关于 r 偏导为零可直观理解为 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为单位向量、不含任何长度信息（与 r 无关），或者直接将其用球坐标在直角坐标系下表示：

$$\hat{\boldsymbol{r}}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta,\sin\varphi,\cos\theta), \tag{2.3.23}$$

可见 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 与 r 无关. 记 $B(P_0,r)$ 为球心为 P_0、半径为 r 的球域，将题设条件化为：

$$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B(P_0,r)}f(P)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B(P_0,1)}f(P)\cdot r^2\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B(P_0,1)}f(P)\,\mathrm{d}S\,, \tag{2.3.24}$$

因此

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\iint_{\partial B(P_0,1)}f(P)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B(P_0,1)}\frac{\partial f(P)}{\partial r}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B(P_0,1)}\nabla f(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B(P_0,r)}\nabla f(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\overset{\text{Gauss 定理}}{=\!=\!=}\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{B(P_0,r)}\nabla^2 f(P)\,\mathrm{d}V=\frac{r}{3}\nabla^2 f(M),\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

其中最后一行已用到积分中值定理，可得 $\nabla^2 f(M)=0$. 由 r 的任意性以及 f 具有二阶连续偏导数，令 $r\to 0^+$，可得 $\nabla^2 f(P_0)=0$. 由 P_0 的任意性，可知对 $\forall P\in\mathbb{R}^3$，均有 $\nabla^2 f(P)=0$.

2.4 2020-2021 期末

1. 设 $I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x$，求 $I'(u)$.

   解 由变上下限积分的求导法则，

   $$I'(u)=-\sin u\cdot\mathrm{e}^{\cos^2 u-u\cos u}-\cos u\cdot\mathrm{e}^{\sin^2 u-u\sin u}+\int_{\sin u}^{\cos u}-x\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.4.1}$$

   其中

   $$\begin{aligned}\int_{\sin u}^{\cos u}-x\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x&=-\int_{\sin u}^{\cos u}\Big(x-\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\Big)\mathrm{e}^{(x-u/2)^2-u^2/4}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\mathrm{e}^{-u^2/4}}{2}\Big(\mathrm{e}^{(\cos u-u/2)^2}-\mathrm{e}^{(\sin u-u/2)^2}\Big)-\frac{u}{2}I(u),\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

   整理得

   $$I'(u)=-\Big(\frac{1}{2}+\sin u\Big)\mathrm{e}^{\cos^2 u-u\cos u}+\Big(\frac{1}{2}-u\Big)\mathrm{e}^{\sin^2 u-u\sin u}-\frac{u}{2}I(u). \tag{2.4.3}$$

2. 设 $\boldsymbol{v}=\Big(\dfrac{y}{z}-\dfrac{1}{y},\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2},1-\dfrac{xy}{z^2}\Big)$ $(y>0,z>0)$.

   (1) 证明 $\boldsymbol{v}$ 是有势场.

   (2) 求其全体势函数.

   (3) 计算 $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$.

   解 (1) 由题意，

   $$\nabla\times\boldsymbol{v}=\Big(\frac{x}{z^2}+\frac{x}{z^2},-\frac{y}{z^2}+\frac{y}{z^2},\frac{1}{z}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\Big)=0, \tag{2.4.4}$$

   因此 $\boldsymbol{v}$ 在 $y,z>0$ 的区域内为有势场.

   (2) 由题意，其势函数

   $$\varphi(x,y,z)=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+f(y,z)\quad\Longleftarrow\quad\varphi_y=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}+f_y=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}, \tag{2.4.5}$$

   因此 $f_y(y,z)=0$，可设 $f(y,z)=g(z)$，从而

   $$\varphi_z=-\frac{xy}{z^2}+g'=1-\frac{xy}{z^2}\quad\Longrightarrow\quad g(z)=z+C, \tag{2.4.6}$$

   因此势函数为

   $$\varphi(x,y,z)=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+z+C. \tag{2.4.7}$$

   (3) 由题意，

   $$\text{原式}=\varphi(1,2,3)-\varphi(1,1,1)=\Big(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+3\Big)-1=\frac{13}{6}. \tag{2.4.8}$$

3. (1) 计算曲线积分 $\int_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$、直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形边界.

解 由题意，

$$\int_{\substack{y=0,\\0\leqslant x\leqslant 2}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-1, \tag{2.4.9}$$

$$\int_{\substack{y=x,\\0\leqslant x\leqslant \sqrt{2}}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-1, \tag{2.4.10}$$

$$\int_{\substack{\rho=2,\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^2\cdot 2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2, \tag{2.4.11}$$

因此

$$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2 + 2(\mathrm{e}^2-1). \tag{2.4.12}$$

(2) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D: x^2+y^2\leqslant\pi$ 上有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin\left(x^2+y^2\right), \tag{2.4.13}$$

$\boldsymbol{n}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向，计算曲线积分 $\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$.

解 参考作业题 11.3.7 的思路，设曲线上某一线元的单位法向为 $\hat{\boldsymbol{n}}=(\cos\beta,\sin\beta)$，则其对应的正向线元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s = (-\sin\beta,\cos\beta)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \tag{2.4.14}$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = (\cos\beta,\sin\beta)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x), \tag{2.4.15}$$

因此原式可化为

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s &= \oint_{\partial D}\nabla u\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial D} u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{Green 公式}} \iint_D (u_{xx}+u_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标}} 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi.\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

4. 计算积分 $I=\iint_S 2(1+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 S 是曲线 $y=\sqrt{x}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转生成的旋转面，法向与 x 轴正向夹角为钝角.

解 记有向曲面 $D=\{(x,y,z)|y^2+z^2\leqslant 1,\ x=1\}$，其方向沿 x 轴正向，则 $S+D$ 围成法向向外的有向闭曲面，其围成的区域为 Ω. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}I &= \iint_{S+D+D^-} 2(1+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iiint_\Omega (2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{D^-} 2(1+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho^2}\mathrm{d}z - 4\cdot\pi\cdot 1^2 = -3\pi\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

5. 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$，计算曲线积分

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,, \tag{2.4.18}$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$，从 z 轴的正向看去，L 沿顺时针方向.

解 采用 Stokes 公式可得

$$I=2\iint_S (y-z,z-x,x-y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{2.4.19}$$

其中有向曲面 S 取为球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 上被 L 包围的区域，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=-\frac{(x-2,y,z)}{2}\,\mathrm{d}S=-\frac{(x-2,y,z(x,y))}{2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{(x-2,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}.\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

注意到 S 关于 x,y 对称，因此

$$I=-\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\frac{4(z(x,y)-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}=-4\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi. \tag{2.4.21}$$

6. (1) 将 $f(x)=\pi/2-x,\ x\in[0,\pi]$ 展开成余弦级数.

(2) 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解 (1) 先将 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上做偶延拓得到 $F(x)$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且分段可微，故 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且分段可微，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=0, \tag{2.4.22}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right]=\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi},\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

因此 $f(x)$ 的余弦级数收敛于其自身，即

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad x\in[0,\pi]. \tag{2.4.24}$$

(2) 由题意，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}f(0)=\frac{\pi^2}{8}, \tag{2.4.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{2.4.26}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.4.27}$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.4.28}$$

类似地，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}, \tag{2.4.29}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{2.4.30}$$

7. (1) 求使积分 $\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛的参数取值范围.

(2) 收敛时，利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$.

(3) 证明：含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

解 (1) 将积分区域拆分为 $[0,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 考虑. 在 $[0,1)$ 内，被积函数 $f(x,\alpha)=x^\alpha/(1+x^2)$ 在 $x\to0^+$ 时等价于 x^α，而 $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ 仅在 $\alpha>-1$ 时收敛；在 $[1,+\infty)$ 内，$f(x,\alpha)$ 在 $x\to+\infty$ 时等价于 $1/x^{2-\alpha}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2-\alpha}}$ 仅在 $2-\alpha>1$ 即 $\alpha<1$ 时收敛. 综上，$\varphi(\alpha)$ 收敛时 $\alpha\in(-1,1)$.

(2) 由题意，

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)&\xlongequal{u=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha/2}}{1+u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1-\alpha}{2},\frac{1+\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma((1-\alpha)/2)\Gamma((1+\alpha)/2)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sin[(1-\alpha)\pi/2]}=\frac{\pi}{2\cos(\alpha\pi/2)},\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

其中第二行已利用 B 函数的定义以及余元公式.

(3) 仿第 (1) 问的证明，在 $[0,1)$ 内，$|f(x,\alpha)|\leqslant x^{-\alpha_0}$，而 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_0}}$ 收敛；在 $[1,+\infty)$ 内，$|f(x,\alpha)|<1/x^{2-\alpha_0}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2-\alpha_0}}$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法，$\varphi(\alpha)$ 在 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 内一致收敛.

8. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心，任意 $r>0$ 为半径的半圆 $L:x=x_0+r\cos\theta$, $y=y_0+r\sin\theta$，恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0, \tag{2.4.32}$$

证明：$P(x,y)=0$, $\partial Q(x,y)/\partial x=0$.

证明. 考虑从 (x_0-r,y_0) 到 (x_0+r,y_0) 的直线段 L_0，记 L 与 L_0 围成的区域为 D，取 L 为正向曲线，则由 Green 公式，

$$\iint_D(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{L_0+L}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{L_0}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+0=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.4.33}$$

利用积分中值定理，$\exists(\xi,\eta)\in D$ 且 $\exists\zeta\in(x_0-r,x_0+r)$，使得

$$(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=P(\zeta,y_0)\cdot 2r\quad\Longrightarrow\quad P(\zeta,y_0)=\frac{\pi}{4}r\,(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}. \tag{2.4.34}$$

注意到 P,Q 具有二阶连续偏导数，上式两端分别令 $r\to 0^+$，可得 $P(x_0,y_0)=0$. 再由 (x_0,y_0) 的任意性，可得对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均有 $P(x,y)=0$. 将其代入上式，类似可得

$$Q_x(\xi,\eta)=0\quad\Longrightarrow\quad Q_x(x_0,y_0)=\lim_{r\to 0^+}Q(\xi,\eta)=0\quad\Longrightarrow\quad Q_x(x,y)=0. \tag{2.4.35}$$

2.5 2019-2020 期末

1. 设 $f(u,v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的偏导数，令 $\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,\mathrm{d}x$，求 $F'(\alpha)$.

   解 由变上下限积分的求导法则，

   $$F'(\alpha)=-\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}(f_1-f_2)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.5.1}$$

2. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中积分区域 V 由曲面 $z=(x^2+y^2)/2$ 与平面 $z=8$ 围成.

   解 作柱坐标变换，可得

   $$\text{原式}=2\pi\int_0^8\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^8 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1024\pi}{3}. \tag{2.5.2}$$

3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

   解 记 $f(x,a)=(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\sin x/x$，该含参变量反常积分为 $g(a)$. Dirichlet 积分给出 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而当 $a\in[0,b]$ 时，$\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}$ 单调减且分别有上下界 1 和 0,，由 Abel 判别法，该含参变量积分一致收敛. 注意到

   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}f_a(x,a)\,\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-ax}\cos x\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-1+a\left(\mathrm{e}^{-ax}\sin x\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\\&=-1+a^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

   因此

   $$\int_0^{+\infty}f_a(x,a)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+a^2} \tag{2.5.4}$$

   收敛，进而

   $$g(a)=g(b)+\int_b^a g'(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\arctan b-\arctan a=\arctan\frac{b-a}{1+ab}. \tag{2.5.5}$$

4. 设 $n,m>0$，利用 Euler 积分计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}}\,\mathrm{d}x$.

   解 由题意，

   $$\text{原式}\xlongequal{u=x^m}\int_0^1\frac{u^{(n-1)/m}}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{u^{1/m-1}}{m}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{n}{m},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma(n/m)}{\Gamma(n/m+1/2)}. \tag{2.5.6}$$

5. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.5.7}$$

其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被 $z=0$ 和 $z=3$ 所截部分的外侧.

解 考虑柱坐标下沿 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 方面的面元，则有

$$I=\iint_{\Sigma}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}1\cdot 1\cdot\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=2\pi\cdot 3=6\pi. \tag{2.5.8}$$

6. (1) 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\pi/2,\\ 0, & \pi/2\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数（须讨论其收敛性）.

(2) 分别求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的值.

解 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内为偶函数且分段可微，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=1, \tag{2.5.9}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \tag{2.5.10}$$

因此

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x=\begin{cases}1/2, & |x|=\pi/2,\\ f(x), & \text{elsewhere},\end{cases} \tag{2.5.11}$$

直接计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{4}. \tag{2.5.12}$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{2.5.13}$$

7. 试定出正数 λ，使曲面

$$F(x,y,z)=xyz-\lambda=0,\quad G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{2.5.14}$$

在第一象限某一点相切，即有共同的切平面.

解 设该切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，两个曲面在该点的法向量分别为

$$\nabla F\Big|_{P_0}=(y_0z_0,z_0x_0,x_0y_0),\quad\nabla G\Big|_{P_0}=2\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{b^2}\right), \tag{2.5.15}$$

对应的切平面分别为

$$\pi_1: y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z - 3\lambda = 0, \quad \pi_2: \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} - 1 = 0. \tag{2.5.16}$$

曲面相切要求该点切平面重合，即

$$\lambda = x_0y_0z_0 = t\frac{x_0^2}{a^2} = t\frac{y_0^2}{b^2} = t\frac{z_0^2}{c^2}. \tag{2.5.17}$$

将上述方程代入椭圆方程，可得切点为 $(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$，进而

$$\lambda = \frac{abc}{3\sqrt{3}}. \tag{2.5.18}$$

8. 讨论 $f(x,y) = \begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性与可微性.

解 考虑 f 在极坐标下的表示：

$$g(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho\cos\varphi\sin\varphi. \tag{2.5.19}$$

当 $x^2 + y^2 \to 0$ 时，即沿某一过原点的曲线 $\varphi = \varphi(\rho)$ 趋于原点，由夹逼准则，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\varphi) = 0 = f(0,0), \tag{2.5.20}$$

因此 $f(x,y)$ 在原点连续. 由偏导数的定义，

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = f_y(0,0), \tag{2.5.21}$$

因此极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos\varphi(\rho)\sin\varphi(\rho) \tag{2.5.22}$$

不存在，故 $f(x,y)$ 在原点不可微.

9. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在单位圆盘 $U = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上有一阶连续偏导数，且 $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$，证明：在单位圆周上存在一点 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)\eta = g(\xi,\eta)\xi$.

解 注意到偏导相等的条件可与 Green 公式结合，因此构造

$$\oint_{\partial U} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = \iint_U (g_x - f_y) = 0. \tag{2.5.23}$$

在边界 ∂U 上，令 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$，可得

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\partial U} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} [g(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta - f(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi[g(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi - f(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi], \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

其中最后一行已用到积分中值定理，因此 $\exists(\xi,\eta) = (\cos\varphi,\sin\varphi) \in \partial U$，使得

$$f(\xi,\eta)\eta = g(\xi,\eta)\xi. \tag{2.5.25}$$

10. 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{2.5.26}$$

计算

$$I=\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.5.27}$$

解 利用 Leibniz 法则，可将被积函数写为

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla f=\frac{1}{2}\nabla r^2\cdot\nabla f=\frac{1}{2}\nabla\cdot(r^2\nabla f)-\frac{1}{2}r^2\nabla^2 f, \tag{2.5.28}$$

对第一项使用 Gauss 定理：

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot(r^2\nabla f)=\iint_{\partial\Omega}r^2\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\partial\Omega}1\cdot\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega\nabla^2 f, \tag{2.5.29}$$

因此原积分化为

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega(1-r^2)\nabla^2 f\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\cdot 4\pi\int_0^1(1-r^2)r\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}. \tag{2.5.30}$$

11. (1) 设 $u=ax+by$, $v=cx+dy$，其中 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 是正交常数矩阵. 证明：对平面上任意的光滑（至少有二阶连续偏导数）数量场 f，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{2.5.31}$$

(2) 设变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的偏导数. 已知对平面的任意光滑数量场 f，下列等式成立

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{2.5.32}$$

I. 证明：参数变换的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix}\partial u/\partial x&\partial u/\partial y\\\partial v/\partial x&\partial v/\partial y\end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

II. 证明：$\begin{pmatrix}\partial u/\partial x&\partial u/\partial y\\\partial v/\partial x&\partial v/\partial y\end{pmatrix}$ 是常值矩阵.

解 (1) 由题意，

$$\begin{cases}f_x=af_u+cf_v,\\f_y=bf_y+df_v\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_u\\\partial_v.\end{pmatrix} \tag{2.5.33}$$

设该变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 同样为正交常数矩阵，因此

$$\begin{aligned}\Delta_{uv}&=\begin{pmatrix}\partial_u&\partial_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_u\\\partial_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x&\partial_y\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\partial_x&\partial_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\end{pmatrix}=\Delta_{xy},\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

其中已利用 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为二阶单位阵. 将该算符等式作用于平面上任意的光滑数量场 f，得证.

(2) 由链式法则，

$$\begin{aligned}\partial_x^2 &= \partial_x(u_x\partial_u + v_x\partial_v)\\ &= u_{xx}\partial_u + v_{xx}\partial_v + u_x(u_x\partial_u^2 + v_x\partial_{uv}) + v_x(u_x\partial_{uv} + v_x\partial_v^2),\end{aligned} \tag{2.5.35}$$

对 ∂_y^2 类似，将其代入题设条件：

$$\begin{aligned}&f_{uu} + f_{vv} = f_{xx} + f_{yy}\\ =&(u_{xx} + u_{yy})f_u + (v_{xx} + v_{yy})f_v + (u_x^2 + u_y^2)f_{uu} + (v_x^2 + v_y^2)f_{vv}\\ &+ 2(u_xv_x + u_yv_y)f_{uv}.\end{aligned} \tag{2.5.36}$$

由于上述等式对于平面上任意的光滑的数量场 $f(x,y)$ 成立，因此分别设 $f = u(x,y)$ 和 $f = v(x,y)$，可得

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{2.5.37}$$

对任意满足条件的 u, v 成立. 再分别设 $f = u^2$ 和 $f = v^2$，代入上述条件，可得

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = 1 \tag{2.5.38}$$

对任意满足条件的 u, v 成立. 最后设 $f = uv$，代入上述所有条件，可得

$$u_xv_x + u_yv_y = 0. \tag{2.5.39}$$

综上，若设参数变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} u_x^2 + u_y^2 & u_xv_x + u_yv_y \\ u_xv_x + u_yv_y & v_x^2 + v_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}, \tag{2.5.40}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 为参数变换矩阵.
另一方面，将(2.5.38)式两端分别对 x, y 求偏导，并与(2.5.37)式联立，可得

$$u_{xx} = u_{xy} = u_{yy} = v_{xx} = v_{xy} = y_{yy} = 0 \tag{2.5.41}$$

对 $\forall P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 成立，因此将 u, v 分别在原点处作二阶 Taylor 展开：

$$u(x,y) = u(0,0) + u_x(0,0)x + u_y(0,0)y + 0 = ax + by + u(0,0), \tag{2.5.42}$$

$$v(x,y) = v(0,0) + v_x(0,0)x + v_y(0,0)y + 0 = cx + dy + v(0,0), \tag{2.5.43}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 各项均为常数，从而 $\boldsymbol{A}$ 为常值矩阵.

2.6 2018-2019 期末

1. 设已知方程 $\phi\left(x+\dfrac{z}{y}+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定了一个隐函数 $z=f(x,y)$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   解 由隐函数求导法则，

$$z_x=-\frac{\phi'\cdot(1-z/x^2)}{\phi'\cdot(1/y+1/x)}=\frac{y(z-x^2)}{x(x+y)}, \tag{2.6.1}$$

$$z_y=-\frac{\phi'\cdot(-z/y^2)}{\phi'\cdot(1/y+1/x)}=\frac{zx}{y(x+y)}, \tag{2.6.2}$$

   因此

$$xz_x+yz_y=\frac{(x+y)z-x^2y}{x+y}=z-\frac{x^2y}{x+y}. \tag{2.6.3}$$

2. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在原著 $x^2+y^2=2x$ 内的部分面积.

   解 注意到圆锥面为被截曲面，圆柱面为截面，记该部分曲面为 Σ，则其面积

$$\begin{aligned}S(\Sigma)&=\iint_\Sigma \mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

3. 求积分

$$I=\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V\,, \tag{2.6.5}$$

   其中 V 为椭球 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 内部.

   解 考虑广义球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\cos\varphi,\\ y=br\cos\theta\sin\varphi,\\ z=cr\cos\theta,\end{cases}$ 利用仿射变换后的旋转对称性，可直接对 θ,φ 积分：

$$\begin{aligned}I&=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\,\mathrm{d}r\xlongequal{t=r^2}2\pi abc\int_0^1\sqrt{t}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t\\&=2\pi abc\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=2\pi abc\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi^2}{4}abc.\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

4. 设

$$\boldsymbol{v}=\frac{y^2+z^2}{r^3}\boldsymbol{i}-\frac{xy}{r^3}\boldsymbol{j}-\frac{xz}{r^3}\boldsymbol{k} \tag{2.6.7}$$

   是定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上的向量场，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (1) 证明：$\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$.

   (2) 求向量场 $\boldsymbol{v}$ 的势函数.

解 将向量场化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{x}{r^3}(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{x}{r^3}\boldsymbol{r} = \nabla\Big(\frac{x}{r}\Big),\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

因此该向量场为梯度场，旋度自然为零，其势函数为 $x/r + C$，C 为某一待定常数.

5. 设向量场 $\boldsymbol{v} = -x\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + \sqrt{x^2+y^2+z^2-1/4}\boldsymbol{k}$，曲面 $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$，它的正向是外法向. 求向量场 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 在定向曲面 S 上的积分

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{2.6.9}$$

解 注意到

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1/4}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1/4}}, y\right) \tag{2.6.10}$$

在 S 包围的区域内具有奇点 $x^2+y^2+z^2=1/4$，其在 S 上的积分先代入 S 的方程再使用 Gauss 定理，即

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \Big(\frac{2y}{\sqrt{3}}, -\frac{2x}{\sqrt{3}}, y\Big)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0. \tag{2.6.11}$$

6. 计算无穷积分

$$I = \int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{t(2-t)}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.6.12}$$

解 由题意，

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{+\infty}[(t-1)+1]^2\mathrm{e}^{-(t-1)^2+1}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=(t-1)^2} \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^{+\infty}\Big(\sqrt{u}+2+\frac{1}{\sqrt{u}}\Big)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2}\Big[\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)+2\Gamma(2)+\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] = \Big(1+\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\Big)\mathrm{e}.\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

7. 设 $f(x) = \cosh(x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，求该函数的余弦级数，并证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1} = \frac{1}{\mathrm{e}^2-1}. \tag{2.6.14}$$

解 先将 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上做偶延拓得 $F(x)$. 由于 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且分段可微，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n = 0$ 且

$$a_0 = 2\int_0^1 \cosh(x-1)\,\mathrm{d}x = 2\sinh 1, \tag{2.6.15}$$

$$\begin{aligned}a_n &= 2\int_0^1 \cosh(x-1)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[\cosh(x-1)\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sinh(x-1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\sinh(x-1)\cos n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \cosh(x-1)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2}(\sinh 1 - a_n),\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

因此 $f(x)$ 的余弦级数为

$$f(x)=\sinh 1\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2+1}\right)\quad(0\leqslant x\leqslant 1),\tag{2.6.17}$$

进而可计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(0)}{\sinh 1}-1\right)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}.\tag{2.6.18}$$

8. 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，求证：

(1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

(2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

(3) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程

$$F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}.\tag{2.6.19}$$

解 (1) 记 $f(x,t)=\sin tx/(1+x^2)$，显然 $x=0$ 并非其奇点. 注意到 $|f(x,t)|\leqslant 1/(1+x^2)$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法，该广义积分在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $F(t)$ 连续.

(2) 注意到当 $t\in(0,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f_t(x,t)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x\sin tx}{t(1+x^2)}\bigg|_0^{+\infty}-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin tx\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin tx\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}\tag{2.6.20}$$

而被积函数在 $(2,+\infty)$ 上有控制函数 $1/(x^2-1)$，并且

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{\ln 3}{2}\tag{2.6.21}$$

收敛，由 Weierstrass 判别法，该广义积分收敛，且

$$F'(t)=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin tx\,\mathrm{d}x\,.\tag{2.6.22}$$

(3) 将上一问的结果继续化简：

$$tF'(t)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x^2)^2}\right]\sin tx\,\mathrm{d}x=F(t)-2\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.\tag{2.6.23}$$

记 $g(x,t)=\sin tx/(1+x^2)^2$，则 $|g_t(x,t)|=\left|x\cos tx/(1+x^2)^2\right|\leqslant x/(1+x^2)^2$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，该等式可微且

$$tF''(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\cos tx}{1+x^2}\bigg|_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-1+tF(t),\tag{2.6.24}$$

即证明得

$$F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}.\tag{2.6.25}$$

2.7 2017-2018 期末

1. 设 F 具有一阶连续偏导数，$w=w(x,y,z)$ 是方程

$$F(x-aw,y-bw,z-cw)=1 \tag{2.7.1}$$

（其中 a,b,c 为常数）所确定的隐函数，试求

$$a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.7.2}$$

的值.

解 由隐函数求导法则，

$$aw_x+bw_y+cw_z=\frac{a\cdot(-F_1)+b\cdot(-F_2)+c\cdot(-F_3)}{-aF_1-bF_2-cF_3}=1. \tag{2.7.3}$$

2. 求二元函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的 Taylor 展开的前 4 项（直到 3 次）.

解 记 $u=x+y^2$，对单变量函数 u 作 Taylor 展开即可：

$$\begin{aligned}f(x,y)&=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^4)=1+x+y^2+\frac{x^2+2xy^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4+y^4)\\&=1+x+\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right)+\left(xy^2+\frac{x^3}{6}\right)+o(x^4+y^4).\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

3. 设

$$\boldsymbol{v}=(a_1x^2+2b1xy+c_1y^2)\boldsymbol{i}+(a_2x^2+2b_xy+c_2y^2)\boldsymbol{j} \tag{2.7.5}$$

是平面向量场. 问常数 $a_i,b_i,c_i\ (i=1,2)$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{v}$ 是一个有势场，并求它的一个势函数.

解 势函数要求积分与路径无关，由 Green 定理，对平面内任一闭区域 D，满足

$$\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\iint_D[(a_2-b_1)x+(b_2-c_1)y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{2.7.6}$$

对平面上所有点 (x,y) 成立，因此 $a_2=b_1$, $b_2=c_1$，其势函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{a_1}{3}x^3+b_1x^2y+b_2xy^2+\frac{c_2}{3}y^3+C. \tag{2.7.7}$$

4. 设 p,q 都是正数，求

$$\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x\,. \tag{2.7.8}$$

解 由于表达式中含 e（ln 项），因此向 Γ 函数化. 记 $u=\ln(1/x)$，则 $x=\mathrm{e}^{-u}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$，那么

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^{+\infty}u^p\mathrm{e}^{-qu}\cdot\left(-\mathrm{e}^{-u}\right)\mathrm{d}u\xlongequal{t=(q+1)u}-\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{(q+1)^p}\cdot\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{q+1}\\&=-\frac{\Gamma(p+1)}{(q+1)^{p+1}}=-\frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}.\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

5. 设 L 是平面上光滑的简单闭曲线，其参数方程表示为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. L 的方向与参数增加的方向一致. 证明：L 围成的区域面积 F 等于

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n), \tag{2.7.10}$$

其中 (a_n,b_n) 是 $\varphi(t)$ 的 Fourier 系数，(c_n,d_n) 是 $\psi(t)$ 的 Fourier 系数.

解 由题意，$\varphi(t),\psi(t)$ 具有一阶连续导数，且 $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, $\psi(0)=\psi(2\pi)$. 由 Dirichlet 定理，其一阶导数的 Fourier 系数分别为

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(t)\cos nx\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\,\varphi(t)\cos nt\Big|_0^{2\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nx\,\mathrm{d}t=nb_n, \tag{2.7.11}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(t)\sin nx\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\,\varphi(t)\sin nt\Big|_0^{2\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nx\,\mathrm{d}t=-na_n. \tag{2.7.12}$$

类似地，$C_n=nd_n$, $D_n=-nc_n$，因此

$$\begin{cases}\varphi(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\\ \varphi'(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nt-a_n\sin nt),\end{cases}\qquad\begin{cases}\psi(t)=\dfrac{c_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),\\ \psi'(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(d_n\cos nt-c_n\sin nt).\end{cases} \tag{2.7.13}$$

利用三角函数系的正交性以及 Green 公式，可给出区域 F 的面积为

$$\begin{aligned}A(F)&=\frac{1}{2}\oint_{\partial F}-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)]\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{\infty}[n(a_md_n-b_mc_n)\cdot\pi\delta_{mn}-m(b_mc_n-a_md_n)\cdot\pi\delta_{mn}]\\&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n).\end{aligned} \tag{2.7.14}$$

6. 求 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ $(a\neq0)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 级数，并证明：

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2+a^2}\right]=\frac{\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}. \tag{2.7.15}$$

解 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内分段可微，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{a\pi}-\mathrm{e}^{-a\pi}}{a\pi}=\frac{2\sinh(a\pi)}{a\pi}, \tag{2.7.16}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{e}^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{a}{n}b_n,\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{e}^{ax}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}\sinh(a\pi)+\frac{a}{n}a_n,\end{aligned} \tag{2.7.18}$$

从中解得

$$a_n=\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2},\quad b_n=\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+a^2},\tag{2.7.19}$$

因此

$$\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi}\left[1+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]=\begin{cases}f(x), & x\in(-\pi,\pi),\\ \cosh(a\pi), & |x|=\pi.\end{cases}\tag{2.7.20}$$

令 $x=\pi$，可得

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2+a^2}\right]=\frac{f(\pi)}{\sinh(a\pi)}=\frac{\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}.\tag{2.7.21}$$

7. 设曲面

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\},\tag{2.7.22}$$

它的定向与 z 轴正向同侧. 设

$$f(x,y)=\frac{1+z}{1+x^2+y^2},\quad g(x,y)=xy+yz+zx.\tag{2.7.23}$$

求积分 $\iint_S\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

解 记正向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\}$，其正向与 z 轴正向同向，则 $S+D^-$ 形成封闭曲面，其正向为曲面外法向，围成的封闭区域记为 Ω 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_{S+D^-+D}\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint_{\Omega}\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)\,\mathrm{d}V+\iint_D(\nabla f\times\nabla g)\Big|_{z=0}\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\end{aligned}\tag{2.7.24}$$

其中已利用 $\nabla\cdot\times\boldsymbol{A}=0$，$\boldsymbol{A}$ 为任意矢量场, 另一方面，

$$(\nabla f\times\nabla g)\Big|_{z=0\text{时}z\text{分量}}=(f_xg_y-f_yg_x)\Big|_{z=0}=\frac{2(y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.\tag{2.7.25}$$

又因为积分区域 D 关于 x,y 轮换对称，故

$$\text{原式}=2\iint_D\frac{y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\tag{2.7.26}$$

8. 设 $|\alpha|\neq 1$. 证明：积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，并求其值.

解 注意到 Dirichlet 积分给出 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 关于 α 一致收敛，并且 $|\sin\alpha x|\leqslant 1$ 关于 α 一致有界. 由 Abel 判别法，该广义积分一致收敛. 回顾 Dirichlet 积分的证明思路，记

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x\,.\tag{2.7.27}$$

由于被积函数 $f(x,\beta)$ 有控制函数 $\sin x \sin \alpha x/x$，由 Weierstrass 判别法，该广义积分关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，同时[2]

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_\beta(x,\beta)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} \sin x \sin \alpha x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [\cos(1-\alpha)x - \cos(1+\alpha)x]\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{2.7.29}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\gamma}\sin \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\beta}{\gamma}\int_0^{+\infty} \sin \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\beta}{\gamma^2}\cos \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta^2}{\gamma^2}\int_0^{+\infty} \cos \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{2.7.30}$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \cos \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}. \tag{2.7.31}$$

分别代入 $\gamma = 1 \pm \alpha$，可知当 $|\alpha| \neq 1$ 时，

$$\int_0^{+\infty} f_\beta(x,\beta)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\beta^2+(1-\alpha)^2} - \frac{\beta}{\beta^2+(1+\alpha)^2}\right] \tag{2.7.32}$$

在 $(0,+\infty)$ 上关于 β 收敛，因此 $I(\beta)$ 可微，且

$$I(\beta) = \int I'(\beta)\,\mathrm{d}\beta = C + \frac{1}{4}\ln\frac{\beta^2+(1+\alpha)^2}{\beta^2+(1-\alpha)^2}. \tag{2.7.33}$$

利用边界条件 $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta) = 0$ 可确定积分常数 $C = 0$，因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\,\mathrm{d}x = I(0) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right| \quad (|\alpha| \neq 1). \tag{2.7.34}$$

[2]可引入 Euler 公式：

$$\int_0^{+\infty} \cos \gamma x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma x}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{-(\beta-\mathrm{i}\gamma)x}}{\beta-\mathrm{i}\gamma}\Big|_0^{+\infty} = \mathrm{Re}\frac{1}{\beta-\mathrm{i}\gamma} = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}. \tag{2.7.28}$$

2.8 2016-2017 期末

1. (1) 设 $z=f(x,y)$, $x=u^2+2v^2$, $y=u\mathrm{e}^v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

   解 由链式法则，

   $$z_u=2uf_x+\mathrm{e}^v f_y,\quad z_v=4vf_x+u\mathrm{e}^v f_y. \tag{2.8.1}$$

   (2) 求方程组 $\begin{cases}x=\cos v+u\sin v,\\ y=\sin v-u\cos v\end{cases}$ 所确定的反函数组的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

   解 对变换方程组两端取微分，可得

   $$\begin{cases}\mathrm{d}x=\sin v\,\mathrm{d}u+(u\cos v-\sin v)\,\mathrm{d}v\,,\\ \mathrm{d}y=-\cos v\,\mathrm{d}u+(u\sin v+\cos v)\,\mathrm{d}v\end{cases} \tag{2.8.2}$$

   $$\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin v & u\cos v-\sin v\\ -\cos v & u\sin v+\cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}, \tag{2.8.3}$$

   因此

   $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\sin v & u\cos v-\sin v\\ -\cos v & u\sin v+\cos v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}u\sin v+\cos v & \sin v-u\cos v\\ \cos v & -\sin v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.8.4}$$

   进而可得

   $$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin v+\frac{\cos v}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin v}{u}-\cos v,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v}{u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\sin v}{u}. \tag{2.8.5}$$

2. 设 $a_j>0$, $b_j>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

   (1) 用 Lagrange 乘数法求 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_kx_k^2$ 在条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k=1$ 下的极值.

   (2) 由 (1) 的结论证明不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{b_i}\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$.

   解 (1) 构造 Lagrange 函数

   $$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=f(x+1,\cdots,x_n)+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k-1\right). \tag{2.8.6}$$

   当 f 取极值时，

   $$\begin{cases}\partial_iL=2b_ix_i+\lambda a_i=0\ (i=1,2,\cdots,n),\\ \partial_\lambda L=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k-1=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\lambda=-2\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{b_i}\right),\\ x_k=a_k\Big/\left(b_k\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{b_i}\right).\end{cases} \tag{2.8.7}$$

注意到可直接将条件代入 f，即

$$g(x_1,\cdots,x_{n=1})=f\left(x_1,\cdots,x_{n-1},\frac{1}{a_n}\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}a_kx_k\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{n-1}c_{ij}x_ix_j,\tag{2.8.8}$$

而由于 $b_j>0$，即所有二次项系数为正，因此该二次型多项式 g 必存在极小值、不存在极大值. 故 f 在该条件下无极大值，而在

$$x_k=a_k\Bigg/\left(b_k\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\right)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{2.8.9}$$

处取到极小值 $1\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{b_i}\right)$.

(2) 由上一问的结果，

$$\begin{aligned}&f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 1\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\right)\\ \Longrightarrow\quad&\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_1}\geqslant 1=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2.\end{aligned}\tag{2.8.10}$$

3. 设 $f(x)$ 由连续的导函数，$f(0)=0$，且曲线积分

$$\int_C(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y\tag{2.8.11}$$

与路径无关. 求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y\,.\tag{2.8.12}$$

解 由题意，总可以选择与 C 同起点和终点的正向路径 L，使得 $C+L^-$ 围成封闭区域 D，由 Green 公式，

$$0=\int_{\partial D}(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y=\iint_D[f'(x)-f(x)-\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\tag{2.8.13}$$

对于 $\forall D\subset\mathbb{R}^2$ 成立，要求

$$f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x\quad\Longrightarrow\quad f(x)=\mathrm{e}^x\left(\int\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+C\right)=(x+C)\mathrm{e}^x.\tag{2.8.14}$$

代入 $f(0)=0$，可得 $C=0$，因此可选择从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 再到 $(1,1)$ 的折线段，从而

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y&=f(0)\int_0^1\mathrm{d}y+\int_0^1(\mathrm{e}^x+f(x))\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}.\end{aligned}\tag{2.8.15}$$

4. 设 a,b,c 是正数，求第二型曲面积分

$$\iint_S(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\tag{2.8.16}$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

解 考虑有向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\}$，其正向与 $+z$ 同向，因此 $S+D^-$ 围成封闭区域 Ω. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{S+D^-+D}(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{x,y\text{的交换对称性}}\frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{a+b}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}(a+b).
\end{aligned}\tag{2.8.17}$$

5. 设 a,b,c 不全为零，L 是球面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$ 与平面 $\Sigma:ax+by+cz=0$ 的交线，其方向约定为：质点在 L 上运动的正方向与平面 Σ 的法向 (a,b,c) 成右手系. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L(bz+c)\,\mathrm{d}x+(cx+a)\,\mathrm{d}y+(ay+b)\,\mathrm{d}z\,.\tag{2.8.18}$$

解 记平面 Σ 被球面 S 所截的部分为 D，则由 Stokes 定理，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_D(a,b,c)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_D(a,b,c)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\mathrm{d}S\\
&= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\iint_D\mathrm{d}S=\pi R^2\sqrt{a^2+b^2+c^2},
\end{aligned}\tag{2.8.19}$$

其中已利用平面 Σ 过球面 S 球心的结果，此时 D 恰为半径 R 的大圆.

6. (1) 求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数.

   (2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

   (3) 由 (1) 的结论求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

   解 (1) 由于 $f(x)$ 分段可微且为奇函数，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $a_n=0$ 且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],\tag{2.8.20}$$

   因此其 Fourier 级数为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}0, & x=0\text{ or }\pi,\\ f(x), & \text{elsewhere.}\end{cases}\tag{2.8.21}$$

   (2) 显然 $f(x)$ 平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=2\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.\tag{2.8.22}$$

(3) 构造函数 $g(x)=|x|$，显然该函数分段可微且为偶函数，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi, \tag{2.8.23}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)-\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n], \tag{2.8.24}$$

因此其 Fourier 级数为

$$g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \tag{2.8.25}$$

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad(0\leqslant x\leqslant\pi). \tag{2.8.26}$$

7. 证明：由含参变量的广义积分 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$ 定义的函数 $F(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数.

解 对 $\forall t\geqslant 0$，总 $\exists T>t$，当 $t\in[0,T]$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$ 关于 t 一致收敛，并且 $\ln(1+tx)\leqslant\ln(1+Tx)$，而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+Tx)}{x}=T,\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+Tx)}{x}=0, \tag{2.8.27}$$

因此关于 x 连续的函数 $\ln(1+Tx)/x$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，从而 $\ln(1+tx)/x$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递减且关于 t 一致有界. 由 Abel 判别法，该广义积分一致收敛于 $F(t)$. 记 $f(x,t)=\sin x\ln(1+tx)/x^2$，那么

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f_t(x,t)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+tx)}\,\mathrm{d}x=t\int_0^{+\infty}\sin x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+tx}\right)\mathrm{d}x\\&=t\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+tx}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{2.8.28}$$

对于后者，对 $\forall M>0$，$\left|\displaystyle\int_0^M\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|1-\cos M|\leqslant 2$，并且 $1/(1+tx)$ 当 $t>0$ 时关于 x 单调递减且趋于零，由 Dirichlet 判别法，该广义积分收敛. 因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $F(t)$ 在 $[0,T]$ 内可微. 由 t 的任意性，$F(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微.

8. 设 D 是由光滑闭曲线 L 所围成的区域，函数 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足

$$\mathrm{e}^y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \tag{2.8.29}$$

并且 f 在 L 上恒为零.

(1) 求证：存在有连续偏导数的函数 $P(x,y),Q(x,y)$，使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,\quad(x,y)\in D. \tag{2.8.30}$$

(2) 证明：f 在 D 上恒为零.

解 (1) 可由 Green 第二公式的消项进行联想，构造

$$P(x,y)=-\mathrm{e}^{x}f(x,y)f_{y}(x,y),\quad Q(x,y)=\mathrm{e}^{y}f(x,y)f_{x}(x,y), \tag{2.8.31}$$

可验证得

$$Q_{x}-P_{y}=\mathrm{e}^{y}(f_{x}^{2}+ff_{xx})+\mathrm{e}^{x}(f_{y}^{2}+f_{yy})=\mathrm{e}^{y}f_{x}^{2}+\mathrm{e}^{x}f_{y}^{2}. \tag{2.8.32}$$

(2) 由 Green 公式，

$$\oint_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}(-\mathrm{e}^{x}f_{y}\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{y}f_{x}\,\mathrm{d}y)\cdot f\Big|_{\partial D}=0 \tag{2.8.33}$$

$$=\iint_{D}(Q_{x}-P_{y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D}(\mathrm{e}^{y}f_{x}^{2}+\mathrm{e}^{x}f_{y}^{2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.8.34}$$

由于 $\mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{y}>0$，且 $f_{x}^{2},f_{y}^{2}\geqslant 0$，该积分为零要求

$$f_{x}(x,y)=f_{y}(x,y)=0,\quad \forall(x,y)\in D, \tag{2.8.35}$$

积分中值定理给出

$$f(x,y)=f(x,y)\Big|_{\partial D}=0,\quad \forall(x,y)\in D. \tag{2.8.36}$$

2.9 2015-2016 期末

1. 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1, \\ u+v+x+y=0 \end{cases} \tag{2.9.1}$$

所确定的函数. 求 $\partial(u,v)/\partial(x,y)$.

解 对方程两端同时取微分，整理得

$$\begin{cases} u\,\mathrm{d}u+v\,\mathrm{d}v=-x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y\,, \\ \mathrm{d}u+\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y \end{cases} \quad\Longleftarrow\quad \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \tag{2.9.2}$$

因此 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\det\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Big/\det\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{x-y}{u-v}. \tag{2.9.3}$$

2. 计算积分：

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}}x^2\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.9.4}$$

解 积分区域可写为

$$\begin{aligned} D&=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant\sqrt{\pi},\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi}\} \\ &=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi},0\leqslant y\leqslant x\}, \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

因此积分可化为

$$\begin{aligned} \iint_D x^2\sin(xy)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\sqrt{\pi}}x^2\,\mathrm{d}x\int_0^x\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(1-\cos x^2)\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\left(x^2-\sin x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

3. 设 D 是由直线 $x=0$, $y=x$, $y=\pi/2$ 所围成的区域. 计算二重积分 $\iint_D\dfrac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 显然 $\sin y/y$ 的原函数无初等表示，先对 x 积分：

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin y\,\mathrm{d}y=1. \tag{2.9.7}$$

4. 求第二型曲线积分

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.9.8}$$

其中曲面 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，法向向上.

解 记有向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\}$，其正向沿 $+z$ 方向，则封闭曲面 $S+D^-$ 围成的区域记为 Ω. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_{S+D^-+D}x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=3\cdot 2\pi\int_0^1 r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r=\frac{6\pi}{5}.\end{aligned}\tag{2.9.9}$$

5. 求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz,5x+3azx-2,(a+2)xy-4z)$ 是有势场，并求出此时的势函数.

解 由题意，$(\nabla\times\boldsymbol{F})_x=2(1-a)x=0$，从而 $a=1$，此时势函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x^3}{3}+5xy+3xyz-2y-2z^2+C.\tag{2.9.10}$$

6. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，且 $\sum\limits_{i=1}^n x_i=n$. 用 Lagrange 乘数法证明：

$$\prod_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\leqslant n,\tag{2.9.11}$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

解 构造 Lagrange 函数

$$L(x_1,\cdots,x_n;\lambda)=\sum_{i=1}^n\ln x_i+\ln\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}+\lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i-n\right),\tag{2.9.12}$$

其取极值时

$$\begin{cases}\partial_i L=\dfrac{1}{x_i}-1\Big/\left(x_i^2\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right)+\lambda=0,\\[2ex]\partial_\lambda L=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i-n=0.\end{cases}\tag{2.9.13}$$

将第一个方程两端同时乘 x_i^2，可得

$$x_i-\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right)^2+\lambda x_i^2=0=x_j-\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right)^2+\lambda x_j^2,\quad i\neq j,\tag{2.9.14}$$

从中解得 $x_i=x_j$ 或 $x_i+x_j=-1/\lambda$. 对于后者，可引入指标 k 满足 $k\neq i\neq j$，使得 $x_i+x_k=-1/\lambda$，两式相减得到 $x_j=x_k\ (j\neq k)$，同样回到前者. 因此最终解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时取极值. 注意到当 $x_j,x_k\to 0^+$ 时，原函数中部分项满足

$$\lim_{(x_j,x_k)\to(0,0)}x_jx_k\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=\lim_{(x_j,x_k)\to(0,0)}\left(x_k+x_j+x_kx_k\sum_{i\neq j,k}\frac{1}{x_i}\right)=0,\tag{2.9.15}$$

因此只要存在至少一个 $x_i \to 0^+$，原函数的函数值就趋近于零. 注意到原函数在 $x_i = 0$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n$ 围成的 n 维单形面上连续，且在边界 $x_i = 0$ 上取最小值，因此必然在 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n$ 内部存在最大值、不存在最小值. 从而该最大值必然为极值，而得到的驻点唯一，因此

$$\sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \ln \sum_{i} = 1^n \frac{1}{x_i} \leqslant 0 + \ln n \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \leqslant n, \tag{2.9.16}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

7. 求证：$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0 < x < +\infty$ 可导且满足微分方程

$$f(x) - f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2.9.17}$$

解 显然被积函数 $g(t,x) = \mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2)$ 有控制函数 $1/(1+t^2)$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$，由 Weierstrass 判别法，该广义积分在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. 对于广义积分

$$\int_0^{+\infty} g_x(t,x)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.9.18}$$

仍有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ 关于 x 一致收敛，并且对 $\forall x \in (0,+\infty)$，满足

$$\frac{\partial}{\partial(xt^2)}\left(t^2\mathrm{e}^{-xt^2}\right) = \frac{1}{x}(1-xt^2)\mathrm{e}^{-xt^2}, \tag{2.9.19}$$

即当 $t \geqslant 1/\sqrt{x}$ 时，该部分关于 t 单调递减，且自身有界 $[0,(\mathrm{e}x)^{-1}]$. 由 Abel 判别法，该积分收敛，因此 $f(x)$ 可导，且

$$\begin{aligned} f(x) - f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{[1-(-t^2)]\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{u=xt^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{xu}} = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}. \end{aligned} \tag{2.9.20}$$

2.10 2013-2014 期末

1. 计算下列各题：

(1) 计算 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $\boldsymbol{v}=(x^2+2y,z^3-2x,y^2+z)$ 的旋度和散度.

解 $\nabla\times\boldsymbol{v}=(2y-3z,0,-4)$, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=2x+1$.

(2) 计算二重积分

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.10.1}$$

其中 D 为 $x^2+y^2=4\ (x,y>0)$, $x^2+y^2=1\ (x,y>0)$ 与直线 $y=x$ 和 $x=0$ 所围成的闭区域.

解 作极坐标变换，可得

$$\text{原式}=\int_0^{\pi/4}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{3\pi^2}{64}. \tag{2.10.2}$$

2. 已知螺旋面 S 的方程 $\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v,\\ z=v\end{cases}$ $(0\leqslant u\leqslant 5,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$，试求：

(1) 过 S 上一点 $M(1/2,\sqrt{3}/2,\pi/3)$ 的切平面方程.

(2) 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中 L 是 S 上参数 $u=5$ 对应的曲线.

解 (1) 点 M 处切平面法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\Big|_M&=(\cos v,\sin v,0)\times(-u\sin v,u\cos v,1)\Big|_M\\&=(\sin v,-\cos v,u)\Big|_{u=1,v=\pi/3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right),\end{aligned} \tag{2.10.3}$$

因此该点的切平面为

$$\pi:\sqrt{3}x-y+2z-\frac{2\pi}{3}=0. \tag{2.10.4}$$

(2) 由题意，L 上线元 $\mathrm{d}s=\sqrt{26}\,\mathrm{d}v$，因此

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\frac{v^2}{25}\cdot\sqrt{26}\,\mathrm{d}v=\frac{8\sqrt{26}}{75}\pi^3. \tag{2.10.5}$$

3. 试将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\pi/2,\\ 0, & \pi/2<|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成 Fourier 级数，并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

解 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微且为偶函数，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=1, \tag{2.10.6}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \tag{2.10.7}$$

因此

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x=\begin{cases}1/2, & |x|=\pi/2,\\ f(x), & \text{elsewhere},\end{cases}\tag{2.10.8}$$

进而可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{2}\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{4}.\tag{2.10.9}$$

4. (1) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$，其中常数 $b>a>0$.

解 记该广义积分为 $I(b)$,被积函数 $f(x,b)=\left(\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}\right)/x^2$,首先有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x,b)=b-a$，因此 $x=0$ 处并非 $I(b)$ 的奇点. 在 $[1,+\infty)$ 上，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=1$ 关于 b 一致收敛，且 $\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}\in(0,\mathrm{e}^{-ax^2})$ 关于 x 单调递减. 由 Abel 判别法，该积分关于 b 一致收敛. 另一方面，

$$\int_0^{+\infty}f_b(x,b)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}b\mathrm{e}^{-bx^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=bx^2}b\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{bu}}=\frac{\sqrt{\pi b}}{2}\tag{2.10.10}$$

关于 b 收敛，因此 $I(b)$ 可微，且

$$I'(b)=\frac{\sqrt{\pi b}}{2}\quad\Longrightarrow\quad I(b)=I(a)+\int_a^b I'(u)\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\left(b^{3/2}-a^{3/2}\right).\tag{2.10.11}$$

(2) 利用 Euler 积分计算：$\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 作变量代换 $x^2=4u$，可得

$$\text{原式}=\int_0^1 4u\cdot2\sqrt{1-u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=8\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=8\frac{(\sqrt{\pi}/2)^2}{2}=\pi.\tag{2.10.12}$$

5. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个固定点 M_i $(i=1,2,\cdots,n)$，考察向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\nabla\left(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\right),\tag{2.10.13}$$

其中 $\gamma_i>0$ 为正的常数，r_i 为点 $M(x,y,z)$ 到固定的 M_i 的距离. 已知光滑封闭曲面 S 所围成的区域的内部包含了这 n 个固定点，试求 $\boldsymbol{F}$ 穿过曲面 S 的流量.

解 对于任意不包含 M_i 的闭区域 ω，由 Gauss 定理，

$$\oiint_{\partial\omega}\nabla\left(\frac{1}{r_i}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\oiint_{\partial\omega}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_i}{r_i^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iiint_{\omega}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i^3}\,\mathrm{d}V=0.\tag{2.10.14}$$

因此，可在 S 所围成的闭区域内分割出 n 个分别以 M_i 为球心、ε_i 为半径的球 $B(M_i,\varepsilon_i)$，

各球之间无交叠，剩余区域记为 Ω. 那么由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\sum_{i=1}^{n}\oiint_{B(M_i,\varepsilon_i)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&= 0+\sum_{i=1}^{n}\left[0+\oiint_{B(M_i,\varepsilon_i)}\nabla\left(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{4\pi}\oiint_{B(M_i,\varepsilon_i)}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}_i}{\varepsilon_i^2}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_i\,\mathrm{d}S\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{4\pi\varepsilon_i^2}\cdot 4\pi\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i.
\end{aligned}\tag{2.10.15}$$

2.11 2012-2013 期末

1. 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1, \\ u+v+x+y=0 \end{cases} \tag{2.11.1}$$

所确定的函数. 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

解 对方程两端同时取微分，整理得

$$\begin{cases} u\,\mathrm{d}u+v\,\mathrm{d}v=-x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y\,, \\ \mathrm{d}u+\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \tag{2.11.2}$$

因此 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\det\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Big/\det\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{x-y}{u-v}. \tag{2.11.3}$$

2. 计算积分：

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}}x^2\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.11.4}$$

解 积分区域可写为

$$\begin{aligned} D&=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant\sqrt{\pi},\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi}\} \\ &=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi},0\leqslant y\leqslant x\}, \end{aligned} \tag{2.11.5}$$

因此积分可化为

$$\begin{aligned} \iint_D x^2\sin(xy)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\sqrt{\pi}}x^2\,\mathrm{d}x\int_0^x\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(1-\cos x^2)\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\left(x^2-\sin x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.11.6}$$

3. 计算抛物线 $2x=y^2$ 与直线 $y=2x-2$ 所围成的区域的面积.

解 由题意，交点纵坐标分别为 -1 和 2，因此该区域 D 的面积

$$A(D)=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2/2}^{1+y/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{9}{2}. \tag{2.11.7}$$

4. 求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz,5x+3azx-2,(a+2)xy-4z)$ 是有势场，并求出此时的势函数.

解 由题意，$(\nabla\times\boldsymbol{F})_x=2(1-a)x=0$，从而 $a=1$，此时势函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x^3}{3}+5xy+3xyz-2y-2z^2+C. \tag{2.11.8}$$

5. 设 α 不是整数，求 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数展开，并证明

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-n^2}\right). \tag{2.11.9}$$

解 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微且为偶函数，由 Dirichlet 定理，其 Fourier 系数为 $b_n=0$ 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}, \tag{2.11.10}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x]\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\alpha-n}+\frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\alpha+n}\right]=\frac{2(-1)^n}{\pi}\frac{\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2},\end{aligned} \tag{2.11.11}$$

因此其 Fourier 展开为

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\left[1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right], \tag{2.11.12}$$

进而当 $|x|=\pi$ 时，

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-n^2}\right). \tag{2.11.13}$$

6. 求证：$f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上有二阶连续导数且满足微分方程

$$f''(x)+f(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \tag{2.11.14}$$

解 显然被积函数 $g(t,x)=\cos t/[1+(x+t)^2]$ 有控制函数 $1/(1+t^2)$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ 关于 x 一致收敛，由 Weierstrass 判别法，该广义积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 考虑广义积分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}g_x(t,x)\,\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}\frac{-2(x+t)\cos t}{[1+(x+t)^2]^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.11.15}$$

注意到后一项与 $g(t,x)$ 有相同的控制函数，且第一项在 $[0,+\infty)$ 内由定义，由 Weierstrass 判别法，该广义积分一致收敛，即 $f(x)$ 可微，且

$$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.11.16}$$

类似可证明 $f(x)$ 二阶可微，且

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{2(x+t)\sin t}{[1+(x+t)^2]^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} - f(x), \end{aligned} \tag{2.11.17}$$

即可证明

$$f''(x) + f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \tag{2.11.18}$$

7. 设 D 是 xy 平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域，$f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有二阶连续偏导数，且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a\frac{\partial f}{\partial x} + 2b\frac{\partial f}{\partial y} + cf, \tag{2.11.19}$$

其中 a,b,c 为常数且 $c \geqslant a^2+b^2$. 求证：若 f 在 ∂D 上恒为零，则 f 在 D 上恒为零.

解 见到 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 可联想 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$. 再观察题设条件，有希望通过配方解决，因此构造

$$P(x,y) = -f(x,y)f_y(x,y), \quad Q(x,y) = f(x,y)f_x(x,y), \tag{2.11.20}$$

由 Green 公式，

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} (-f_y\,\mathrm{d}x + f_x\,\mathrm{d}y)\cdot f\Big|_{\partial D} = 0 \\ =& \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D [(f_x^2+f_y^2) + f(f_{xx}+f_{yy})]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =& \iint_D (f_x^2 + f_y^2 + 2af f_x + 2bf f_y + cf^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =& \iint_D [(f_x+af)^2 + (f_y+bf)^2 + (c-a^2-b^2)f^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{2.11.21}$$

由于被积函数非负，而积分值为零，要求被积函数在 D 内均为零. 当 $c > a^2+b^2$ 时，直接可得 $f \equiv 0$，进而可导出 $a=b=0$；当 $c = a^2+b^2$ 时，可知 $f_x = -a$, $f_y = -b$. 对于 ∂D 上任意不同的两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，由积分中值定理，

$$0 = f(P_2) - f(P_1) = f_x(\xi,\eta)(x_2-x_1) + f_y(\xi,\eta)(y_2-y_1) = -a(x_2-x_1) - b(y_2-y_1). \tag{2.11.22}$$

由 P_1, P_2 的任意性，可导出 $a=b=0$，从而 $f_x = f_y = 0$. 再任取 D 内任一点 $P(x,y)$，由积分中值定理，

$$f(P) = f(P_1) + f_x(\xi',\eta')(x-x_1) + f_y(\xi',\eta')(y-y_2) = f(P_1) = 0, \quad \forall P \in D. \tag{2.11.23}$$