2013-2023 考研真题解答（数学分析部分）

邓嘉驹

更新：February 17, 2024

目录

1 2024 年真题解答 2

2 2023 年真题解答 6

3 2022 年真题解答 11

4 2021 年真题解答 15

5 2020 年真题解答 19

6 2019 年真题解答 23

7 2018 年真题解答 27

8 2017 年真题解答 31

9 2016 年真题解答 33

10 2015 年真题解答 36

11 2014 年真题解答 39

1　2024 年真题解答

1. 选择题

1. 注意到

$$f(-x)=\int_0^{-x}\mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t\xlongequal{u=-t}-\int_0^{x}\mathrm{e}^{\cos u}\,\mathrm{d}u=-f(x),\tag{1}$$

$$g(-x)=\int_0^{-\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal{u=-t}-\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=-g(x),\tag{2}$$

因此 $f(x),g(x)$ 均为奇函数，选择 C. 至于 D 选项，假设 $f(x)$ 是周期为 $T>0$ 的周期函数，则

$$f(x+T)-f(x)=\int_x^{x+T}\mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t=T\mathrm{e}^{\cos\xi},\tag{3}$$

其中 $\xi\in(x,x+T)$，故 $f(x+T)-f(x)>0$ 恒成立，即不可能存在这样的周期 T 满足 $f(x+T)=f(x)$，$f(x)$ 不是周期函数.

2. 由已知条件，$\mathrm{d}z=(-x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)/\sqrt{1-x^2-y^2}=(-x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)/z$，因此

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint_\Sigma\left(P\,\mathrm{d}y\cdot\frac{-x\,\mathrm{d}x}{z}+Q\,\mathrm{d}x\cdot\frac{-y\,\mathrm{d}y}{z}\right)\\&=\iint_\Sigma\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{4}$$

3. 由题意，

$$\ln(2+x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{2+x}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.\tag{5}$$

要获得 a_n 中 n 取偶数的项，可考虑 $1-(-1)^{n-1}$ 的组合，即分别令 $x=\pm1$ 相减得

$$\frac{1}{3}-1=\sum_{n=1}^{\infty}na_n[1-(-1)^{n-1}]=\sum_{n=1}^{\infty}(2n)a_{2n}\cdot2\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}na_{2n}=-\frac{1}{6},\tag{6}$$

选择 A.

注　作为检验，可计算 a_n 的通项再求和. 注意到 $\ln(2+x)=\ln2+\ln(1+x/2)$，后者可展开为

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad\Longrightarrow\quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^n}\ (n\geqslant1),\tag{7}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{-1}{2n\cdot2^{2n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-1/4}=-\frac{1}{6}.\tag{8}$$

4. $f(0)$ 未知，排除 A 和 B. 若 $f'(0)=m$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)=f(0)+mx+o(x)$. 由题意，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，因此

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=m.\tag{9}$$

2. 填空题

1. 利用等价无穷小，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left[\sin x\ln\left(1+ax^2\right)\right]-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln\left(1+ax^2\right)}{x^3}=a=6. \tag{10}$$

2. 由链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin x f_1'(\cos x,1+x^2)+2xf_2'(\cos x,1+x^2), \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sin^2 x f_{11}''-4x\sin x f_{12}''+4x^2f_{22}''-\cos x f_1'+2f_2'. \tag{12}$$

由题意，$u=v=1$ 时，$\mathrm{d}f(1,1)=3\,\mathrm{d}u+4\,\mathrm{d}v$，因此 $f_1'(1,1)=3,\ f_2'(1,1)=4$，进而

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=-3+2\cdot 4=5. \tag{13}$$

3. 可视为将 $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上作了偶延拓，因此

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}(1+x)\sin nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi=-\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n],\end{aligned} \tag{14}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin\left[\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\right]=-\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2}=-\frac{1}{\pi}. \tag{15}$$

4. 记 $u=x+y$，则 $y'=u'-1$，微分方程改写为

$$u'-1=\frac{1}{u^2}\quad\Longrightarrow\quad\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x\quad\Longrightarrow\quad x+C=u-\arctan u. \tag{16}$$

初始条件 $y(1)=0$，即 $u(1)=1$，代入解得 $C=-\pi/4$，因此

$$y=u-x=\arctan u-\frac{\pi}{4}\quad\Longrightarrow\quad x+y=u=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan y}{1-\tan y}. \tag{17}$$

3. 解答题

1. 由题意，

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)\mathrm{d}y\\&\xlongequal{u=\sinh t}2\int_0^{\operatorname{arcsinh}1}\cosh^2 t\,\mathrm{d}t-2=\operatorname{arcsinh}1+1\cdot\sqrt{1+1^2}-2\\&=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-2+\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{18}$$

2. (a). 曲线方程可写为 $f(x,y)-z=0$，因此其在 $(1,1,1)$ 的法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\left.(3x^2-2(x+y),3y^2-2(x+y),-1)\right|_{(1,1,1)}=(-1,-1,-1), \tag{19}$$

因此平面 T 的方程为

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(x-1,y-1,z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad T:x+y+z=3. \tag{20}$$

(b). 令 $z=0$，得到 xOy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 3\}$.

I. 先考虑边界上的最值. 由于 $f(x,y)$ 关于 x,y 交换对称，且边界 $x=0$ 与 $y=0$ 也是交换对称的，故只需考虑其一. 记 $g(x)=f(x,0)=x^3-x^2+3$，其中 $x\in[0,3]$，则 $g'(x)=3x^2-2x$. 当 $x\in(0,2/3)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调减；当 $x\in(2/3,3)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调增. 因此可能的最值有

$$g(0)=3,\quad g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{77}{27},\quad g(3)=21. \tag{21}$$

在边界 $x+y=3$ 上，记

$$h(x)=f(x,3-x)=x^3+(3-x)^3-6=9x^2-27x+21=9\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}. \tag{22}$$

几何上知 $h(0)=h(3)=g(3)$，因此新的可能最值仅有 $h(3/2)=3/4$.

II. 在考虑区域 D 内部的最值，其必然为极值，因此满足

$$\begin{cases} f_x=3x^2-2(x+y)=0,\\ f_y=3y^2-2(x+y)=0 \end{cases}\quad\Longrightarrow\quad (x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \tag{23}$$

因此可能的最值为

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=2\cdot\frac{64}{27}-\frac{64}{9}+3=\frac{17}{27}. \tag{24}$$

综上，比较各值可知 $f(x,y)$ 的最大值为 $f(3,0)=f(0,3)=21$，最小值为 $f(4/3,4/3)=17/27$.

3. (a). 将 $f(x)$ 分别在 $x=0,1$ 处展开：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2 \tag{25}$$

$$=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2 \tag{26}$$

其中 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，利用 $f'(0)=f'(1)$，将两个展开式分别乘 $1-x,x$ 后相加：

$$\begin{aligned} f(x)&=(1-x)f(x)+xf(x)\\ &=(1-x)f(0)+xf(1)+\frac{x(1-x)}{2}[f''(\xi_1)x+f''(\xi_2)(1-x)], \end{aligned} \tag{27}$$

因此

$$\begin{aligned} |f(x)-(1-x)f(0)-xf(1)|&\leqslant\frac{x(1-x)}{2}[|f''(\xi_1)|x+|f''(\xi_2)|(1-x)]\\ &\leqslant\frac{x(1-x)}{2}\cdot(x+1-x)=\frac{x(1-x)}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

(b). 由上一问的结论，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| &= \left|\int_0^1 [f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}. \end{aligned} \tag{29}$$

4. 记 $\vec{\boldsymbol{A}}=(6(xyz-yz^2),2x^2z,xyz)$，因此

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=(xz-2x^2,6xy-13yz,6z^2-2xz). \tag{30}$$

由于 L 为闭路，可利用 Stokes 定理，其在一平面上，简单起见，取有向曲面为该平面上 L 围成的区域 Σ，法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}=(2,0,-1)/\sqrt{5}$. 而 Σ 在 xOy 平面上的投影 D 的边界为 $x^2+y^2+(2x-1)^2=2x$，即

$$D=\{(x,y)|5(x-3/5)^2+y^2\leqslant 4/5\}. \tag{31}$$

且面元关系为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 因此

$$\begin{aligned}\int_L \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} &= \iint_\Sigma \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma (4xz-4x^2-6z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (-20x^2+20x-6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left[-20\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-4\left(x-\frac{3}{5}\right)-\frac{6}{5}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\substack{x=3/5+2\rho\cos\theta/5\\ y=2\rho\sin\theta/\sqrt{5}}} \frac{4}{5\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 -\frac{16}{5}\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho-\frac{6}{5}\cdot\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{16}{25\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{24\pi}{25\sqrt{5}}=-\frac{8\pi}{5\sqrt{5}}. \end{aligned} \tag{32}$$

2 2023 年真题解答

1. 选择题

1. 渐近线斜率为

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=\ln\mathrm{e}=1, \tag{33}$$

渐近线截距为

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/\mathrm{e}(x-1)}{1/x}=\frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{34}$$

因此渐近线方程为 $y=x+1/\mathrm{e}$，选择 B.

2. 该特征方程的两根为 $\lambda_{1,2}=\left(-a\pm\sqrt{a^2-4b}\right)/2$，其通解为 $C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. 希望该函数有界，首先要求存在衰减，$\sqrt{a^2-4b}$ 是否为实数暂且不关心，则 $a>0$ 时至少保证两者均衰减. 当 $\sqrt{a^2-4b}$ 为虚数时，衰减项为 $\mathrm{e}^{-ax/2}$；当 $\sqrt{a^2-4b}$ 为实数时，希望 $-a+\sqrt{a^2-4b}<0$ 仍成立，解得 $b>0$. 特别地，若 $a^2=4b$，方程通解为 $y(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{-ax/2}$，该条件仍满足. 选择 B.

3. 注意到 $x=\begin{cases}3t, & t\geqslant 0,\\ t, & t<0,\end{cases}$ 并且观察选项知至少 $f(X)$ 连续，因此

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{t\sin t-0}{3t-0}=0, \tag{35}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{t\to0^-}\frac{-t\sin t-0}{t-0}=0, \tag{36}$$

故 $f'_+(0)=f'_-(0)$，从而 $f'(0)=0$ 存在，排除 A. 由于

$$f'(x)=\frac{y_t}{x_t}=\begin{cases}(\sin t+t\cos t)/3, & t>0,\\ -(\sin t+t\cos t), & t<0,\end{cases} \tag{37}$$

可见 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=0=f'(0)$，$f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，排除 B. 由于

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{(\sin t+t\cos t)/3}{3t}=\frac{2}{9}, \tag{38}$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{t\to0^-}\frac{-(\sin t+t\cos t)}{t}=-2, \tag{39}$$

可见 $f''_+(0)\neq f''_-(0)$，因此 $f''(0)$ 不存在，选择 D.

4. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，且 $b_n>a_n$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 绝对收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛时，

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-a_n+a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \tag{40}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛. 类似地，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛时，

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - (b_n - a_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n|, \tag{41}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 绝对收敛，选择 A.

2. 填空题

1. 当 $x \to 0$ 时，

$$f(x) = ax + bx^2 + [x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)] = (a+1)x + \left(b - \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2), \tag{42}$$

$$g(x) = \left[1 + x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2). \tag{43}$$

由于此时 $f(x) \sim g(x)$，对比系数可知，$a = -1, b = 2$，因此 $ab = -2$.

2. 曲面在该点法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \left(1 + \frac{2x}{1+x^2+y^2}, 2 + \frac{2y}{1+x^2+y^2}, -1\right)\Big|_{(0,0,0)} = (1, 2, -1), \tag{44}$$

切平面方程为 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (x, y, z) = x + 2y - z = 0$.

3. 希望级数中仅含 a_n 中 n 为偶数的项，可考虑 $1 + (-1)^n$ 的组合，即

$$f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad f(1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{45}$$

两者相加得

$$f(0) + f(1) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] a_n = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 1 \tag{46}$$

其中 a_0 为 Fourier 系数，将展开式两端关于 x 在 $[0, 1]$ 上直接积分得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \frac{a_0}{2}, \tag{47}$$

因此 $a_0 = 1$，代入上式解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 0$.

注 作为检验，可直接计算出 a_n 后再求级数和. 可视为将 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上作偶延拓，因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-x)\sin n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n], \end{aligned} \tag{48}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \tag{49}$$

4. 记 $F(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，由题意，$F(2) = F(0) = 0$ 且 $F'(x+2) - F'(x) = x$，因此在 $[0, x]$ 上积分得

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x [F'(u+2) - F'(u)]\,\mathrm{d}u = [F(x+2) - F(2)] - F(x) = F(x+2) - F(x), \tag{50}$$

从而 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 1/2$.

3. 解答题

1. (a). 由题意，$y(1) = 2$. 曲线在其上一点 $(x_0, y(x_0))$ $(x_0 > 0)$ 处的切线方程为 $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$. 题设中的几何描述转化为代数方程为

$$|x_0| = x_0 = y(x_0) - x_0 y'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = -1, \tag{51}$$

该方程为一阶线性微分方程，其满足 $y(1) = 2$ 的特解为

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_1^x \mathrm{d}u/u}\left(\int_1^x -\mathrm{e}^{\int_1^x -\mathrm{d}u/u}\,\mathrm{d}u + 2\right) = x(2 - \ln x). \tag{52}$$

(b). $f'(x) = y(x) = x(2 - \ln x)$ $(x > 0)$，因此当 $x \in (0, \mathrm{e}^2)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增；当 $x \in (\mathrm{e}^2, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减. 那么在 $(0, +\infty)$ 上，$f(x)$ 的最大值为

$$f(\mathrm{e}^2) = \int_1^{\mathrm{e}^2} y(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}(2 - \ln x)\right|_1^{\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2} x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4 - 5}{4}. \tag{53}$$

2. $f(x, y)$ 取极值时，要求

$$f_x = 2x(x^3 - y) + 3x^2(x^2 - y) = x[5x^3 - (2 + 3x)y] = 0, \tag{54}$$

$$f_y = (y - x^3) + (y - x^2) = 2y - (x^2 + x^3) = 0, \tag{55}$$

可直接看出一个解 $(0, 0)$. 当 $x \neq 0$ 时，消去 y 得

$$10x^3 = (2 + 3x)(2y) = (2 + 3x)x^2(1 + x) \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1) = 0, \tag{56}$$

因此还有两个解 $(1, 1)$ 和 $(2/3, 10/27)$. 再计算其二阶导：

$$f_{xx} = 20x^3 - 2(1 + 3x)y, \quad f_{xy} = -x(2 + 3x), \quad f_{yy} = 2 \overset{\Delta}{=\!=} C. \tag{57}$$

在 $(0, 0)$ 附近，记 $g(x) = f(x, 0) = x^5$，则 $x = 0$ 显然并非其极值点，因为 $g'(x) = 5x^4 \geqslant 0$ 恒成立，不存在使 $g'(x)$ 符号改变的点. 故 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点. 在 $(1, 1)$ 附近，

$$A_1 = \left.f_{xx}\right|_{(1,1)} = 12, \quad B_1 = \left.f_{xy}\right|_{(1,1)} = -5, \tag{58}$$

则 $A_1C-B_1^2=-1<0$，$(1,1)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点. 在 $(2/3,10/27)$ 附近，

$$A_2=\left.f_{xx}\right|_{(2/3,10/27)}=\frac{100}{27},\quad \left.f_{xy}\right|_{(2/3,10/27)}=-\frac{8}{3}, \tag{59}$$

则 $A_2C-B_2^2=8/27>0$ 且 $A_2>0$，因此 $(2/3,10/27)$ 为 $f(x.y)$ 的极小值.

综上，$f(x,y)$ 在点 $(2/3,10/27)$ 处取到极小值 $f(2/3,10/27)=-4/729$.

3. Σ 为闭合曲面，因此由 Gauss 定理

$$I=\iiint_\Omega (2z-zx\sin y+3y\sin x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{60}$$

由于将 y 替换为 $-y$ 后，各边界方程形式不变，因此 Ω 关于 zOx 平面对称，从而奇函数 $y,\sin y$ 在 Ω 内的积分贡献为零. 下面确定积分区间. 容易看出 $-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$. 结合几何图像可知，$x\geqslant -1$ 且 $z\geqslant 0$，因此 $-1\leqslant x\leqslant 1-z$ 且 $0\leqslant z\leqslant 2$，因此

$$\begin{aligned}
I&=2\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\int_{-1}^{1-z}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\\
&=4\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\int_{-1}^{1-z}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=\!=}4\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\arcsin(1-z)}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^2 z\left[\arcsin(1-z)+\frac{\pi}{2}+(1-z)\sqrt{1-(1-z)^2}\right]\mathrm{d}z\\
&=z^2\arcsin(1-z)\Big|_0^2+\frac{\pi}{2}z^2\Big|_0^2+\int_0^2\left[\frac{z^2}{\sqrt{1-(1-z)^2}}+2z(1-z)\sqrt{1-(1-z)^2}\right]\mathrm{d}z\\
&\overset{1-z=\sin u}{=\!=}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{(1-\sin u)^2}{\cos u}+2(1-\sin u)\sin u\cos u\right]\cos u\,\mathrm{d}u\\
&=2\int_0^{\pi/2}(1+\sin^2 u-2\sin^2 u\cos^2 u)\,\mathrm{d}u=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{5\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{61}$$

4. (a). 由于 $f(0)=0$，将 $f(a)$ 和 $f(-a)$ 在 $x=0$ 附近展开：

$$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\xi_1)}{2!}a^2,\quad f(-a)=-f'(0)a+\frac{f''(\xi_2)}{2!}a^2, \tag{62}$$

其中 $\xi_1,\xi_2\in(-a,a)$，两式相加得

$$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]. \tag{63}$$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故 $f''(x)$ 在该区间内有界. 记 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$，则 $m\leqslant [f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]/2\leqslant M$. 由介值定理，$\exists\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]/2$. 将其代回上式得 $f''(\xi)=[f(a)+f(-a)]/a^2$，证毕.

(b). 记 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值且二阶导数连续，因此 $f'(x_0)=0$，将 $f(a)$ 和 $f(-a)$ 在 $x=x_0$ 附近展开：

$$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2!}(a-x_0)^2,\quad f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}(a+x_0)^2, \tag{64}$$

两式相减得

$$\begin{aligned}
|f(a)-f(-a)|&\leqslant\frac{1}{2}[|f''(\eta_1)|(a-x_0)^2+|f''(\eta)_2|(a+x_0)^2]\\
&=\frac{|f''(\eta_1)|(a-x_0)^2+|f''(\eta_2)|(a+x_0)^2}{(a-x_0)^2+(a+x_0)^2}\,\frac{(a-x_0)^2+(a+x_0)^2}{2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故 $|f''(x)|$ 在该区间内也连续，从而有界. 记 $0 \leqslant |f''(x)| \leqslant \max\{m,M\} = k$，则

$$0 \leqslant \frac{|f''(\eta_1)|(a-x_0)^2 + |f''(\eta_2)|(a+x_0)^2}{(a-x_0)^2+(a+x_0)^2} \leqslant k. \tag{66}$$

由介值定理，$\exists \eta \in (-a,a)$，使得 $|f''(\eta)|$ 取上述表达式的值. 将其代回原不等式得

$$|f(a)-f(-a)| \leqslant \big|f''(\eta)\big|(a^2+x_0^2) \leqslant 2a^2\big|f''(\eta)\big| \quad \Longrightarrow \quad \big|f''(\eta)\big| \geqslant \frac{|f(a)-f(-a)|}{2a^2}. \tag{67}$$

3 2022 年真题解答

1. 选择题

1. $\lim\limits_{x\to1} f(x)/\ln x = 1 \Rightarrow f(x)\sim \ln x\ (x\to 1)$，因此 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\ln x = 0$，选择 B.

   注 由于条件只涉及极限，所以必然不会与函数值直接相关，可直接排除 A 和 C.

2. 由题意，

$$\begin{aligned} y^2\ln\frac{y}{x} = xz_x + yz_y &= x\left[yf\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y\left[xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right)\right] \\ &= 2xyf\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned} \tag{68}$$

   整理得

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} \quad\Longrightarrow\quad f(u) = \frac{1}{2}u\ln u, \tag{69}$$

   因此 $f(1)=0,\ f'(1) = (\ln 1+1)/2 = 1/2$，选择 B.

3. 关键在于利用 $\cos x, \sin x$ 在 $(n+1/2)\pi$ 与 $n\pi$ 处函数值的特殊性及其奇偶性构造反例. 选项 A，反例可为 $x_n = n\pi$；选项 B，反例可为 $x_n = (n+1/2)\pi$. 选项 C，由于 $\cos x$ 为偶函数，可构造反例 $x_n = (n+1/2)\pi$ 使得 $\sin x_n$ 振荡但 $\cos(\sin x_n)$ 为常值. 最终选择 D.

4. 注意到 I_1, I_2 积分式结构类似，先进行比较：记 $f(x) = \ln(1+x) - x/2$，则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1-x}{2(1+x)} > 0, \quad \forall x\in(0,1), \tag{70}$$

   因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增，故 $f(x) > f(0) = 0$，从而

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x/2}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = I_2, \tag{71}$$

   排除 B 和 D. 又注意到 I_1, I_3 积分式结构类似，再进行比较：

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} < \frac{2}{1} = 2 < 4, \quad \forall x\in(0,1), \tag{72}$$

   因此

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x}{(1+\sin x)/2}\,\mathrm{d}x = I_3, \tag{73}$$

   排除 C，最终选择 A.

2. 填空题

1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,1)} \leqslant \left.|\nabla f|\right|_{(0,1)} = \left.\sqrt{(2x)^2+(4y)^2}\right|_{(0,1)} = 4.$

2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{e}^2} 2\ln\sqrt{x}\cdot 2\,\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right) = 4\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x}-1\right)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} = 4.$

3. 由题意，记 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$，则要求 $k\geqslant f(x,y)$ 在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 内恒成立，相当于求解 $f_{\max}$.

(a). 在第一象限内部，极值点满足

$$f_x=(2x-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0,\quad f_y=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0, \tag{74}$$

从中解得 $x=y=0$ 或 1. 由于已告知存在最大值点，故直接代入验证：

$$f(0,0)=0,\ f(1,1)=\frac{2}{\mathrm{e}^2}\quad\Longrightarrow\quad f_{\max}=\frac{2}{\mathrm{e}^2},\quad \forall x>0,\ y>0. \tag{75}$$

(b). 在坐标轴正半轴（边界）上，$x=0$ 或 $y=0$. 由于 $f(x,y)$ 关于 x,y 交换对称，不失一般性，记 $g(x)=f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，则

$$g'(x)=x(2-x)\mathrm{e}^{-x}\quad\Longrightarrow\quad f_{\max}(x,0)=g_{\max}=g(2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}>\frac{2}{\mathrm{e}^2}. \tag{76}$$

综上，$f_{\max}=4/\mathrm{e}^2$，因此 k 的取值范围为 $[4/\mathrm{e}^2,+\infty)$.

注 事实上二元函数求最值的问题中，若存在至少单侧闭区间边界，最好优先考虑其边界上的最值，其一是由于边界上的极值通常容易求解（一元函数），其二则是因为不容易在内部求解计算一通后忘记考虑边界.

4. 由比值判别法，希望

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\mathrm{e}^{-(n+1)x}/(n+1)^{n+1}}{n!\mathrm{e}^{-nx}/n^n}=\mathrm{e}^{-x}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-(x+1)}<1, \tag{77}$$

解得收敛区间为 $(-1,+\infty)$，故 $a=-1$.

当然，也可以直接利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}/n=1/\mathrm{e}$ 并结合根值判别法给出结果. 这一极限的证明可由 Stirling 公式[1]给出.

注 倘若出现在大题中，还需要验证 $x=-1$ 是否在收敛域内，但题中已给定收敛域左端为开区间，故可以默认该函数项级数在该点发散.

3. 解答题

1. 一阶线性微分方程通解为

$$\begin{aligned}
y(x)&=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x/2\sqrt{x}}\left[\int(2+\sqrt{x})\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x/2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+C\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left[\int(2+\sqrt{x})\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+C\right]\\
&\xlongequal{u=\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left[\int(2+u)\mathrm{e}^{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u+C\right]\\
&=2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left[2(u-1)\mathrm{e}^{u}+(u^2-2u+2)\mathrm{e}^{u}+C'\right]\\
&=2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left(u^2\mathrm{e}^{u}+C'\right)=2x+C\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.
\end{aligned} \tag{78}$$

又 $y(1)=2+C\mathrm{e}^{-1}=3$，解得 $C=\mathrm{e}$，因此 $y(x)=2x+\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$，其渐近线[2]为 $y=2x$.

[1]该公式具体为，当 $n\to\infty$ 时，$n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$

[2]渐近线的一般形式为 $y=kx+b$，计算时可先计算 $k=\lim\limits_{x\to\infty}y_1/x$，其中 $y_1(x)$ 为待求渐近线的曲线表达式；再计算 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y_1-kx)$. 这里由于容易看出 $x\to+\infty$ 时 $\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}\to 0$，就直接写出了

2. 分析可知，区域 D 为直线 $y=x+2$、圆弧 $x^2+y^2=4$ 与 x 轴围成的图形，其面积

$$A(D)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi+2. \tag{79}$$

在极坐标系中将其边界方程改写为

$$\rho(\theta)=\begin{cases}2, & 0\leqslant\theta<\pi/2,\\ 2/(\sin\theta-\cos\theta), & \pi/2\leqslant\theta<\pi,\end{cases} \tag{80}$$

因此积分可改写为

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=A(D)-2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\,\mathrm{d}\rho-2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2/(\sin\theta-\cos\theta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\\
&=\pi-4\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\overset{\theta\to\pi-\theta}{=\!=\!=}\pi+4\int_0^{\pi/2}\frac{\tan\theta}{(1+\tan\theta)^2(1+\tan^2\theta)}\,\mathrm{d}(\tan\theta)\\
&\overset{u=\tan\theta}{=\!=\!=}\pi+2\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u=\pi+2\left(\arctan u+\frac{1}{1+u}\right)\Big|_0^{+\infty}\\
&=\pi+2\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)=2(\pi-1).
\end{aligned} \tag{81}$$

3. 记 $\vec{\boldsymbol{A}}=(yz^2-\cos z,2xz^2,2xyz+x\sin z)$，由 Stokes 定理，

$$\begin{aligned}
I&=\oint_L\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=\iint_\Sigma(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}\\
&=\iint_\Sigma\left(-2zx,0,z^2\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\,,
\end{aligned} \tag{82}$$

其中椭球的单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(2x,y,z)}{\sqrt{4x^2+y^2+z^2}}=(2x,y,z), \tag{83}$$

其中 f 为曲面 Σ 的方程：$f=4x^2+y^2+z^2-1=0$. 这样 $\mathrm{d}S$ 与其在 xOy 平面内的投影 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的夹角可计算：

$$\cos\theta=|(0,0,1)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}|=z\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\theta}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}. \tag{84}$$

对应投影区域 $D=\{(x,y)|4x^2+y^2\leqslant 1,\ x,y\geqslant 0\}$，因此

$$\begin{aligned}
I&=\iint_\Sigma(-2zx,0,z^2)\cdot(2x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma(z^2-4x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(1-8x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\overset{x=\rho\cos\theta/2}{\underset{y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=}}A(D)-\int_0^{\pi/2}(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5\pi}{16}.
\end{aligned} \tag{85}$$

4. 考虑变上限积分函数

$$F(x)=\int_{(a+b)/2}^{x}f(u)\,\mathrm{d}u\,,\quad\forall x\in[a,b], \tag{86}$$

将 $F(a), F(b)$ 分别在 $(a+b)/2$ 处展开至二阶：

$$F(a)=\int_{(a+b)/2}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{f''(\xi_1)}{3!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3, \tag{87}$$

$$F(b)=\int_{(a+b)/2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{f''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3, \tag{88}$$

其中 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，因此

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3. \tag{89}$$

由于 $f\in C^2(-\infty,+\infty)$，因此在 $\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ 内，由介值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^2. \tag{90}$$

(a). 必要性：若 $f''(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立，则容易看出对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$，均有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{91}$$

(b). 充分性：若

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{92}$$

对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$ 恒成立，假定存在区域 (a_0,b_0) 使得其内 $f''(x)<0$，在该区间内满足

$$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=\frac{1}{b_0-a_0}\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f''(\xi_0)}{24}(b_0-a_0)^2<\frac{1}{b_0-a_0}\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{93}$$

这与已知条件矛盾，故假设不成立，在 $\mathbb{R}$ 上均有 $f''(x)\geqslant 0$.

4 2021 年真题解答

1. 选择题

1. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1=f(0)$，且
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2},\tag{94}$$
选择 D.
2. 由题意，
$$f(x,\mathrm{e}^{x-1})=(x-1)x^2=x^2\ln\mathrm{e}^{x-1},\quad f(x,x^2)=2x^2\ln x=x^2\ln x^2,\tag{95}$$
猜想 $f(x,y)=x^2\ln y$，则
$$\mathrm{d}f(1,1)=\left(2x\ln y\,\mathrm{d}x+\frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y\right)\Big|_{(1,1)}=\mathrm{d}y,\tag{96}$$
选择 C.
3. 由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $b=0$，排除 C 和 D. 在 $x=0$ 附近，由题意，
$$\sin x=(1+x^2)[ax+cx^3+o(x^3)]=ax+(a+c)x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),\tag{97}$$
对比系数解得 $a=1,c=-7/6$，选择 A.
4. 选项 A，区间被 $2n$ 等分，因此括号内应为 $k/2n$，求和指标也应为 $2n$，排除. 选项 B，区间被 n 等分，有 n 个端点，正确. 选项 C，区间被 $2n$ 等分，差 $1/2$，排除. 选项 D 同选项 C，差 $1/4$，排除. 故最终选择 B.

2. 填空题

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$
2. 由一阶微分形式不变性，
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{[y'(x)]_t}{x_t}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1},\tag{98}$$
因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.
3. Euler 方程的特征：齐次方程中各项均为 $x^ny^{(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$. Euler 方程的模式化解法：令 $x=\mathrm{e}^t$，则[3] $xy'=y_t$，$x^2y''=y_{tt}-y_t$，因此 Euler 方程改写为
$$0=x^2y''+xy'-4y=(y_{tt}-y_t)+y_t-4y=y_{tt}-4y,\tag{99}$$
因此方程特解为 $y=A\mathrm{e}^{2t}+B\mathrm{e}^{-2t}=Ax^2+B/x^2$. 代入 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的条件得
$$\begin{cases}y(1)=A+B=1,\\ y'(1)=2A-2B=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=0\end{cases}\Longrightarrow\quad y(x)=x^2.\tag{100}$$

[3] 由于考察时通常至多涉及二阶的形式，这两个结果建议牢记

4. 由于 Σ 为闭合曲面，且待求积分为第二型曲面积分，考虑 Gauss 定理：记 $\vec{\boldsymbol{A}}=(x^2,y^2,z)$，则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}&=\iiint_{\Omega}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}})\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}(2x+2y+1)\,\mathrm{d}V\\&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=2\cdot\pi\cdot1\cdot2=4\pi,\end{aligned}\tag{101}$$

其中 Ω 为 Σ 所包围的空间区域，且利用了其关于 yOz 平面和 zOx 平面的对称性.

3. 解答题

1. 结合 L'Hospital 法则与等价无穷小，当 $x\to0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{\sin x}&\sim\frac{1}{x^2}\left[\sin x\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-(\mathrm{e}^x-1)\right]\\&\sim\frac{1}{2x}\left[\cos x\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)+\mathrm{e}^{x^2}\sin x-\mathrm{e}^x\right]\\&\sim\frac{1}{2}\left[2\mathrm{e}^{x^2}\cos x+2x\mathrm{e}^{x^2}\sin x-\sin x\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-\mathrm{e}^x\right],\end{aligned}\tag{102}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，故

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{\sin x}\right]=\frac{1}{2}\cdot(2+0-0-1)=\frac{1}{2}.\tag{103}$$

2. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$ 为等比级数，其收敛域为 $D_1=(0,+\infty)$，和函数为

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1},\quad\forall x>0.\tag{104}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛半径 $R=1$，且 $x=\pm1$ 时，

$$\left|\frac{(\pm1)^{n+1}}{n(n+1)}\right|<\frac{1}{n^2},\tag{105}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故其收敛域为 $D_2=[-1,1]$，和函数为

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\quad\Longrightarrow\quad S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.\tag{106}$$

又因为 $S_2(0)=S_2'(0)=0$，积分得

$$S_2'(x)=-\ln(1-x)\quad\Longrightarrow\quad S_2(x)=(1-x)[\ln(1-x)-1]+1,\quad\forall x\in[-1,1].\tag{107}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $D=D_1\cap D_2=(0,1]$，其和函数为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S_1(x)+S_2(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}+x+(1-x)\ln(1-x),\quad\forall x\in(0,1].\tag{108}$$

3. 该距离为 $|z|$，但绝对值并不好处理，故改选目标函数为 $f(x,y,z)=z^2$，从而在这两个约束条件下的 Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30), \tag{109}$$

极值条件：

$$\begin{cases} L_x=2\lambda x+4\mu=0, \\ L_y=4\lambda y+2\mu=0, \\ L_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ L_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0, \\ L_\mu=4x+2y+z-30=0. \end{cases} \tag{110}$$

从前两式解得 $x=-2\mu/\lambda$, $y=-\mu/2\lambda$，后两式给出

$$36=(x^2+2y^2)+(4x+2y)=\frac{9}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2-9\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mu}{\lambda}=4\text{或}-2. \tag{111}$$

当 $\mu=4\lambda$ 时，$x=-8$, $y=-2$，从而 $z_1=66$；当 $\mu=-2\lambda$ 时，$x=4$, $y=1$，从而 $z_2=12$. 又题干已告知存在最大值，故距离最大值

$$|z|_{\max}=|z_1|=66. \tag{112}$$

4. (a). 注意到 D 在 $x^2+y^2\leqslant 4$ 内成分越多，其积分值取正成分的越多，即积分值增大；反之若 D 内包含 $x^2+y^2>4$ 的部分，则会削减积分值. 据此分析，使积分值最大的 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$，且

$$\begin{aligned} I(D_1)&=\iint_{D_1}(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\xrightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{4}\,(4-\rho^2)^2\Big|_0^2\right]=8\pi. \end{aligned} \tag{113}$$

(b). 先改写被积表达式[4]：

$$\begin{aligned} I&=\int_{\partial D_1}\frac{(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\,\mathrm{d}x+(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} \\ &=\int_{\partial D_1}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{x^2+4y^2}}{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}(x^2+4y^2)+\int_{\partial D_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}. \end{aligned} \tag{114}$$

注意到前者为一全微分（尽管并不关心其原函数），故其在 ∂D_1 上的环路积分值必定为零（环路上不存在其奇点）. 后者表达式中，记 $P=y/(x^2+4y^2)$, $Q=-x/(x^2+4y^2)$，则

$$Q_x-P_y=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}-\frac{x^2-4y^2}{(x^2-4y^2)^2}=0, \tag{115}$$

[4]改写的原因是使用 Stokes 定理时发现含 e 的项求导化简极其繁琐，因此寻找可能的简化计算的方法

但 D_1 内存在 P,Q 的奇点 $(0,0)$，因此取正向闭路 $\Gamma: x^2+4y^2=1$. 在 ∂D_1 和 Γ 围成的区域内不包含 $(0,0)$，因此 $Q_x - P_y = 0$ 总是成立的，由 Stokes 定理，

$$\begin{aligned} I &= 0 + \int_{\partial D_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{x^2+4y^2=1} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{1} \xlongequal[y=\sin\theta/2]{x=\cos\theta} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = -\pi. \end{aligned} \tag{116}$$

5 2020 年真题解答

1. 选择题

1. 选项 A，注意到 $x\to 0$ 时 $\mathrm{e}^{t^2}-1\sim t^2$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{3x^2}=\frac{1}{3},\tag{117}$$

即该函数在 $x\to 0$ 时为 3 阶无穷小. 类似地，对于后三个选项中的函数分别有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{5/2}}\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t&=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1+\sqrt{x^3}\right)}{5x^{3/2}}=\frac{2}{5},\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin\left(\sin^2 x\right)}{3x^2}=\frac{1}{3},\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}}{5x^4}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2/2)^{3/2}}{5x^3}=\frac{\sqrt{2}}{20}.\end{aligned}\tag{118}$$

综上，选项 D 中的函数为 5 阶无穷小，阶数最高，选择 D.

2. 未给定 $f(0)$ 的信息（含连续性条件），故 $f'(0)$ 是否存在必然未知，排除 A 和 B. 当 $f'(0)$ 存在时，由定义，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\quad\Longrightarrow\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)\ (x\to 0).\tag{119}$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，故 $f(0)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\lim_{x\to 0}\left[\pm\sqrt{|x|}+o\left(\sqrt{|x|}\right)\right]=0,\tag{120}$$

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=f'(0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 当且仅当 $f'(0)=0$ 时存在. 故最终选择 C.

3. 由于函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，故

$$f(x,y)-f_x(0,0)x-f(0,0)y=-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(x,y,f(x,y))=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\tag{121}$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\tag{122}$$

选择 A.

注 本题考查对二元函数可微的等价定义.

4. 选项 C 和 D 容易排除，分别构造 $|r|=R$ 处收敛和发散的反例即可，如分别取 $a_n=1/n^2$ 和 $a_n=1/n$.

2. 填空题

1. 结合 L'Hospital 法则与等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)} &\sim \frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2} \sim \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^x\right)\\ &\sim -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\mathrm{e}^x\right],\end{aligned} \tag{123}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=-1. \tag{124}$$

2. 由一阶微分形式不变性，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{y_t}{x_t}=\frac{1/\sqrt{t^2+1}}{t/\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{t},\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y')_t}{x_t}=\frac{-1/t^2}{t/\sqrt{t^2+1}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3},\end{aligned} \tag{125}$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

3. 由于 $a>0$ 且 $\sqrt{a^2-4}$ 为实数时有 $\sqrt{a^2-4}<a$，故方程的解必含衰减项，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，因此对微分方程两端在 $[0,+\infty)$ 上积分得

$$\left[f'(+\infty)-f'(0)\right]+a[f(+\infty)-f(0)]+\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0, \tag{126}$$

从中解得

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=af(0)+f'(0)=am+n. \tag{127}$$

4. 由偏微分的定义，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x^3y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(3x^3y^2+1)\mathrm{e}^{x^3y^2} \quad\Longrightarrow\quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}. \tag{128}$$

3. 解答题

1. 极值条件：

$$f_x=3x^2-y=0,\ f_y=24y^2-x=0 \quad\Longrightarrow\quad (x,y)=(0,0)\text{ 或 }\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right). \tag{129}$$

先计算二阶导：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y. \tag{130}$$

在 $(0,0)$ 点，$A_1=C_1=0$，无法直接判断. 不妨考虑函数 $f(x,0)=x^3$ 的变化趋势，显然该函数在 $x=0$ 处非极值点，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也不可能为极值点. 在 $(1/6,1/12)$ 点，$A_2=1,\ B_2=-1,\ C_2=4$，因此 $A_2>0$ 且 $A_2C_2-B_2^2=5>0$，故该点为极小值点.
综上，$f(x,y)$ 在 $(1/6,1/12)$ 处取极小值 $f(1/6,1/12)=-1/216$.

2. 注意到

$$\oint_L \frac{4x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{4x^2+y^2} = \frac{1}{2}\oint_L \frac{\mathrm{d}(4x^2+y^2)}{4x^2+y^2}, \tag{131}$$

由于闭路 L 上不含满足 $4x^2+y^2=0$ 的点，故该全微分在 L 上的环路积分值必定为零. 记 $P=-y/(4x^2+y^2)$, $Q=x/(4x^2+y^2)$，则在不包含 $(0,0)$ 的区域内，

$$Q_x - P_y = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} = 0. \tag{132}$$

但闭路 L 包围的区域内含 $(0,0)$，故取正向闭路 $\Gamma: 4x^2+y^2=1$，则由 Stokes 定理，该函数在闭路 $C+\Gamma^-$ 上的积分值为零，即

$$\begin{aligned} I = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \oint_\Gamma \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{1} \\ &\xlongequal[y=\sin\theta]{x=\cos\theta/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \pi. \end{aligned} \tag{133}$$

3. 该幂级数的收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+1} = 1, \tag{134}$$

因此当 $|x|<R=1$ 时，该幂级数收敛，记其和函数为 $S(x)$. 由题意，

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)a_{n-1}x^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}S(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xS(x)] = 1 + \frac{1}{2}S(x) + xS'(x), \end{aligned} \tag{135}$$

该方程为一阶线性微分方程，整理解得

$$S'(x) - \frac{1}{2(1-x)}S(x) = \frac{1}{1-x} \quad\Longrightarrow\quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(C - 2\sqrt{1-x}\right) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} - 2. \tag{136}$$

又因为 $S(0)=0$，代入解得 $C=2$，最终得到该级数在 $|x|<1$ 内的和函数：

$$S(x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right). \tag{137}$$

4. 由于未给定 $f(x)$ 可导的条件，不能直接使用 Gauss 定理，从定义出发. 将曲面方程写为 $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z=0$，由于规定其法向与 z 轴正向成钝角，故其法向量为

$$(F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right). \tag{138}$$

注意到上述法向量的模恰好为 $\sqrt{2}$，故其单位法向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right), \tag{139}$$

面元可写为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{140}$$

相应地，Σ 在 xOy 平面上的投影为

$$D = \{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}. \tag{141}$$

在 Σ 上的被积函数可写为

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}[xf(xy) + 2x - y] + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}[yf(xy) + 2y + x] - z[f(xy) + 1] \\ &= \sqrt{x^2+y^2}f(xy) + 2\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}[f(xy)+1] = \sqrt{x^2+y^2},\end{aligned} \tag{142}$$

因此

$$\begin{aligned}I &= \iint_\Sigma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \iint_D (\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi.\end{aligned} \tag{143}$$

5. (a). 设 $|f(x)|$ 在 $x_0 \in (0,2)$ 处取到最大值 M，则由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,2)$，使得

$$f(x_0) - f(0) = f'(\xi_1)x, \quad f(2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(2 - x_0), \tag{144}$$

因此由 Cauchy 不等式，

$$\big|f'(\xi_1)\big| + \big|f'(\xi_2)\big| = |f(x_0)|\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{2-x_0}\right) \geqslant M\frac{(1+1)^2}{x_0 + (2-x_0)} = 2M, \tag{145}$$

等号成立当且仅当 $x_0^2 = (2-x_0)^2$，即 $x_0 = 1$ 时 $|f(1)| = M$. 又因为 $|f(x)|$ 连续，且 $0 \leqslant |f(x)| \leqslant M$，由介值定理，$\exists \xi \in (0,2)$，使得

$$|f(\xi)| = \frac{1}{2}\big(\big|f'(\xi_1)\big| + \big|f'(\xi_2)\big|\big) \geqslant M. \tag{146}$$

(b). 当 $|f'(x)| \leqslant M$ 时，对于满足 $|f'(\xi)| \geqslant M$ 的点 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 而言，若 $\xi_k \neq 1$，则由 (1) 中结果，$|f'(\xi_k)| > M$，矛盾. 故此时 $|f(x)|$ 有且仅有 $x = 1$ 这个最大值点. 在 $(0,1)$ 内，由 Lagrange 中值定理，

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \big|f'(\xi_x)\big|x \leqslant Mx \leqslant |f(1)|, \tag{147}$$

等号成立当且仅当 $|f'(\xi_x)| \equiv M$ 且 $x = 1$. 类似地，在 $(1,2)$ 内，由 Lagrange 中值定理，

$$|f(x)| = |f(2) - f(x)| = \big|f'(\xi_x)\big|(2-x) \leqslant M(2-x) \leqslant M, \tag{148}$$

等号成立当且仅当 $|f'(\xi_x)| \equiv M$ 且 $x = 1$. 由于最大值可在 $x = 1$ 处取到，因此等号必须成立，则 $|f'(x)| \equiv M$ 在 $(0,2)$ 上恒成立. 又因为 $f'(x)$ 连续，故 $f'(x) = \pm M$，其中正负号在 $(0,2)$ 内保持一致，此时 $0 = f(2) - f(0) = \pm 2M$，解得 $M = 0$，证毕.

6 2019 年真题解答

1. 选择题

1. 由 Taylor 展开，

$$x-\tan x=x-\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]=-\frac{x^3}{3}+o(x^3), \tag{149}$$

因此 $k=3$，选择 C.

2. 由左右导数的定义，

$$\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}|x|=0, \end{aligned} \tag{150}$$

故 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=-x^2$ 单调增；当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln x+1$，即 $f(x)$ 在 $(0,1/\mathrm{e})$ 上单调减，故 $x=0$ 为区域极大值点. 最终选择 B.

3. 选项 A，取 $u_n\equiv1$ 即可推反. 选项 B，$n\to\infty$ 时级数项可能极限非零，发散. 选项 C，$u_n\equiv0$ 时各项无意义[5]. 选项 D，容易看出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)=A^2-u_1^2$ 收敛. 最终选择 D.

4. 由题意，P,Q 在上半平面内无奇点且由 Stokes 定理可得

$$P_y=Q_x=\frac{1}{y^2}\quad\Longrightarrow\quad P(x,y)=f(x)-\frac{1}{y}, \tag{151}$$

其中 $f(x)$ 在上半平面内无奇点，对比可知仅选项 D 符合题意.

2. 填空题

1. 计算偏导数：

$$z_x=-\cos x f'(\sin y-\sin x)+y,\quad z_y=\cos y f'(\sin y-\sin x)+x, \tag{152}$$

因此

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}. \tag{153}$$

2. 将方程改写为 $y'-y/2=y^{-1}$，此方程为 Bernouli 方程，令 $u=y^{1-(-1)}=y^2$，则 $u(0)=1$，从而

$$2=2yy'-y^2=2\sqrt{u}\cdot\frac{u'}{2\sqrt{u}}-u=u'-u\quad\Longrightarrow\quad u=3\mathrm{e}^x-2, \tag{154}$$

因此方程的特解为 $y(x)=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

[5] 当 $\{u_n\}$ “严格” 单调增时，该级数收敛，证明如下：记 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)=A-u_1$ 收敛，$\{1/u_{n+1}\}$ 单调减且有下界 $1/A$，由 Abel 判别法，该级数收敛

3. 联想 $\cos x$ 的 Taylor 级数，可直接写出结果 $S(x)=\cos\sqrt{x}$，其中 $x\in(0,+\infty)$. 若不熟悉该公式，可通过求解微分方程的方法同样得到结果. 记 $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$，则

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}t^{2n-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=-f(t), \tag{155}$$

该方程通解为 $f(t)=A\cos t+B\sin t$. 又 $f(0)=1,\ f'(0)=0$，解得 $A=1,\ B=0$，因此当 $x\in(0,+\infty)$ 时，和函数 $S(x)=f(\sqrt{x})=\cos\sqrt{x}$.

4. Σ 在 xOy 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\leqslant 4$，因此

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\,\mathrm{d}\rho=\frac{32}{3}. \tag{156}$$

3. 解答题

1. (a). 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}(x+C)\quad\xrightarrow{y(0)=0}\quad y(x)=x\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{157}$$

(b). 计算 $y(x)$ 的二阶导：

$$y'(x)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2/2},\quad y''(x)=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{158}$$

在 $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ 内，$f''(x)<0$，函数具有凹性；在 $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup(0,+\infty)$ 内，$f''(x)>0$，函数具有凸性. 相应地，0 与 $\pm\sqrt{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.

2. (a). 由题意，最大方向导数即梯度的模，有

$$10=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{(3,4)}\right)_{\max}=\left.|\nabla z|\right|_{(3,4)}=\left.\nabla z\right|_{(3,4)}\cdot\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}, \tag{159}$$

代入 $\nabla z=2(ax,by)$ 和 $\vec{l}=(-3,-4)$ 得

$$10=2\sqrt{(3a)^2+(4b)^2}=-\frac{2}{5}(9a+16b)\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}9a+16b=-25,\\ 9a^2+16b^2=25,\end{cases} \tag{160}$$

容易猜出一个解 $a=b=-1$. 可验证该解为唯一解.

(b). 曲面 $\Sigma:z=2-x^2-y^2\geqslant 0$ 在 xOy 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\leqslant 2$，因此

$$\begin{aligned}A(\Sigma)&=\iint_{\Sigma}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\substack{x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{13\pi}{3}.\end{aligned} \tag{161}$$

3. 若考虑的是纯面积而非有向面积，面积的求解公式写为

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=x-n\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u\triangleq\frac{I_0}{1-\mathrm{e}^{-\pi}},\end{aligned} \tag{162}$$

其中已利用 $\sin(u+n\pi)=(-1)^n\sin u$，并且[6]

$$\begin{aligned} I_0 &= -\,\mathrm{e}^{-u}\sin u\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= -\,\mathrm{e}^{-u}\cos u\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u \\ &= 1+\mathrm{e}^{-\pi} - I_0, \end{aligned} \tag{164}$$

因此 $I_0=(1+\mathrm{e}^{-\pi})/2$，从而

$$I=\frac{I_0}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}. \tag{165}$$

4. (a). 当 $x\in(0,1)$ 时，$x^n>x^{n+1}$，因此

$$a_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=a_n, \tag{166}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned} a_n-a_{n-2} &= -\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n-1}\,x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{3}{n-1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{n-1}a_n, \end{aligned} \tag{167}$$

从中解得

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2},\quad \forall n\geqslant 2. \tag{168}$$

(b). 作为填空题有种不规范的解法：记 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=A^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1. \tag{169}$$

又因为 $a_n>0$，故 $A>0$，解得 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$. 这种方法不规范是因为眼下并未证明 a_n/a_{n-1} 在 $n\to\infty$ 时的极限存在.

利用 Γ 函数和 B 函数将积分结果改写：

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2}\sin^n t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{3}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}+2\Big)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}+2\Big)}, \end{aligned} \tag{170}$$

[6]关于 I_0 的计算可利用复数给出一种更简便的方法：

$$I_0=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u=\mathrm{Im}\Big(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})u}\,\mathrm{d}u\Big)=\mathrm{Im}\Big(\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{i}}\Big)=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}. \tag{163}$$

注意到当 $x \to +\infty$ 时，$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi x}(x/\mathrm{e})^x$，因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{n+3}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}+2\Big)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\Big(\dfrac{n+1}{2\mathrm{e}}\Big)^{(n+1)/2}\cdot\sqrt{n+3}\Big(\dfrac{n+3}{2\mathrm{e}}\Big)^{(n+3)/2}}{\sqrt{n}\Big(\dfrac{n}{2\mathrm{e}}\Big)^{n/2}\cdot\sqrt{n+4}\Big(\dfrac{n+4}{2\mathrm{e}}\Big)^{(n+4)/2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n/2}\Big(1+\frac{1}{n+3}\Big)^{-(n+3)/2}\sqrt{\frac{n+1}{n+4}}\\ &= \sqrt{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot 1 = 1.\end{aligned} \tag{171}$$

5. 由于 Ω 关于 yOz 平面对称，因此形心坐标的 x 分量 $x_C = 0$. 由题意，$0 \leqslant z \leqslant 1$，则

$$x^2 = (1-z)^2 - (y-z)^2 = -(y-1)(y-2z+1) \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad 2z-1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{172}$$

因此区域 Ω 的体积为

$$\begin{aligned}V(\Omega) &= \iiint_\Omega \mathrm{d}V = 2\int_0^1 \mathrm{d}z\int_{2z-1}^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{(1-z)^2-(y-z)^2}}\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{y-z=(1-z)\sin t} 2\int_0^1\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-z)^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \pi\int_0^1(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3},\end{aligned} \tag{173}$$

从而形心坐标满足

$$\begin{aligned}V(\Omega)y_C &= \iiint_\Omega y\,\mathrm{d}V = 2\int_0^1\mathrm{d}z\int_{2z-1}^1 y\sqrt{(1-z)^2-(y-z)^2}\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{y-z=(1-z)\sin t} 2\int_0^1(1-z)^2\,\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[z+(1-z)\sin t]\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^1[(1-z)^2-(1-z)^3]\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},\end{aligned} \tag{174}$$

$$V(\Omega)z_C = \iiint_\Omega \mathrm{d}V = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}, \tag{175}$$

综上，Ω 的形心坐标为

$$(x_C, y_C, z_C) = \Big(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Big). \tag{176}$$

7 2018 年真题解答

1. 选择题

1. 选项 A，$f(x)=|x|\sin|x|=x\sin x$，在 $x=0$ 处可导. 选项 B，直观判断即使定义式中 $|x|$ 与 x 相消，也存在 $\sin\sqrt{|x|}$ 的衰减项使其导数为 0. 可严格计算该函数在 $x=0$ 处的左右导数：

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\sin\sqrt{x}=0,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin\sqrt{-x}-0}{x-0}=-\lim_{x\to0^-}\sin\sqrt{-x}=0, \tag{177}$$

可见 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$，该函数在 $x=0$ 处导数存在，$f'(0)=0$. 选项 C，$f(x)=\cos|x|=\cos x$，在 $x=0$ 处可导. 选项 D，由定义

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}, \tag{178}$$

该极限不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 选择 D.

2. 与曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 相切要求其法向量

$$\vec{\boldsymbol{n}}=(z_x,z_y,-1)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,-1), \tag{179}$$

且该平面过点 (x_0,y_0,z_0)，其中 $z_0=x_0^2+y_0^2$，因此平面方程为

$$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0\quad\Longrightarrow\quad 2x_0x+2y_0y-z=x_0^2+y_0^2. \tag{180}$$

又该平面过 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，代入得

$$x_0^2+y_0^2=2x_0=2y_0\quad\Longrightarrow\quad(x_0,y_0)=(0,0)\text{ 或 }(1,1). \tag{181}$$

当 $x_0=y_0=0$ 时，平面方程为 $z=0$；当 $x_0=y_0=1$ 时，平面方程为 $2x+2y-z=2$. 选择 B.

3. 可结合选项回忆 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Taylor 级数，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot1^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot1^n=2\sin1+\cos1. \tag{182}$$

选择 B.

4. 由于 $x/(1+x^2)$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上为奇函数，故

$$M=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x\,. \tag{183}$$

因此

$$N=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x<\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=M, \tag{184}$$
$$K=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x>\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=M, \tag{185}$$

即 $N<M<K$，选择 C.

2. 填空题

1. 利用取对数指数的方法及等价无穷小，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{1/\sin kx} &= \lim_{x\to0}\exp\left[\frac{1}{\sin kx}\ln\left(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)\right]\\ &= \lim_{x\to0}\exp\left(\frac{1}{kx}\cdot\frac{-2x}{1+\tan x}\right)=\mathrm{e}^{-2/k}=\mathrm{e},\end{aligned}\tag{186}$$

因此 $k=-2$.

2. 由题意，$f(0)=0$ 且 $f(1)=2,\ f'(1)=2\ln 2$，因此

$$\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x = xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f'(1)-[f(1)-f(0)]=2\ln2-2.\tag{187}$$

3. 由定义，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}\Big|_{(1,1,0)} = (y,-z,-x)\Big|_{(1,1,0)}=(1,0,-1).\tag{188}$$

4. 几何上可知平面过球面圆心，因此 L 为一大圆. 写出 L 在 $Oxyz$ 系下的方程：

$$1=x^2+y^2+(x+y)^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}+(x+y)^2=\frac{3}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2.\tag{189}$$

记 $x+y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta=-z,\ x-y=\sqrt{2}\sin\theta$，则

$$xy=\frac{1}{4}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=\frac{1}{6}(4\cos^2\theta-3),\tag{190}$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\frac{1}{2}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2}=\mathrm{d}\theta,\tag{191}$$

因此

$$\oint_L xy\,\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta-3)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\left(4\cdot\frac{2\pi}{2}-3\cdot2\pi\right)=-\frac{\pi}{3}.\tag{192}$$

3. 解答题

1. 由讲义知识点可知：(1) 此为根号内含 e^x 形式的单调函数，原则上可整体换元[7] $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$. (2) 另一方面，换元后 e^{2x} 为关于 e^x 的有理多项式，变成有理分式 × 反正切的形式，因此可对有理分式部分分部积分. 计算如下：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \int(u^2+1)^2\arctan u\cdot\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ &=2\int u(u^2+1)\arctan u\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{2}(u^2+1)^2\arctan u-\frac{1}{2}\int(u^2+1)\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{2}(u^2+1)^2\arctan u-\frac{u^3}{6}-\frac{u}{2}+C\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}(\mathrm{e}^x+2)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}\tag{193}$$

[7] 由于反正切原则上也可整体换元，其实可以作一个更大的整体换元 $u=\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，思路也很清晰

2. 记围成圆、正方形、三角形的铁丝长度分别为 x m、y m 和 z m，则 $x+y+z=2$，其面积和

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12\sqrt{3}} \\ &\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{4\pi+16+12\sqrt{3}}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \end{aligned} \tag{194}$$

其中等号成立当且仅当

$$\frac{x}{4\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}} \text{ 且 } x+y+z=2 \tag{195}$$

时成立. 因此三者面积和存在最小值 $1/\left(\pi+4+3\sqrt{3}\right)$.

3. 曲面方程可写为 $x^2+3(y^2+z^2)=1\ (x\geqslant 0)$，可见其为右半旋转椭球，旋转轴为 x 轴，且方向向外. 由于积分为第二重曲面积分，联想 Gauss 定理，补足有向曲面 $D=\{(x,y,z)|x=0,\ 3y^2+3z^2\leqslant 1\}$，其法向沿 x 轴负方向. 因此 $\Sigma+D$ 为法向向外的闭曲面，由 Gauss 定理，

$$\iint_{\Sigma+D} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{196}$$

其中 Ω 内满足 $x^2+3(y^2+z^2)\leqslant 1$. 注意到被积因式中也含 $3(y^2+z^2)$ 项，考虑将 Ω 沿垂直 x 轴方向分割，再将得到的圆片按圆环 $r\leqslant\sqrt{3(y^2+z^2)}\leqslant r+\mathrm{d}r$ 分割，因此

$$\begin{aligned} \iint_{3(y^2+z^2)\leqslant 1-x^2}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1+r^2)\cdot 2\pi\cdot\frac{r}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{1-x^2}{2}+\frac{(1-x^2)^2}{4}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}(1-x^2)(3-x^2), \end{aligned} \tag{197}$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+D} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}x\iint_{3(y^2+z^2)\leqslant 1-x^2}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\int_0^1(x^4-4x^2+3)\,\mathrm{d}x=\frac{14\pi}{15\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{198}$$

另一方面，

$$\iint_{D} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0, \tag{199}$$

因此 $I=14\pi/15\sqrt{3}$.

4. (a). 该方程为一阶线性微分方程，其通解为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C\right]=x-1+C\mathrm{e}^{-x}. \tag{200}$$

(b). 此时方程通解为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C\right]\overset{\Delta}{=\!=}\mathrm{e}^{-x}F(x)+C\mathrm{e}^{-x}, \tag{201}$$

其中原函数 $F(x)$ 满足 $F(0)=0$，则通解又可改写为变上限积分的形式：

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}[F(x)+y(0)]=\mathrm{e}^{-x}\left[y(0)+\int_0^x f(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right]. \tag{202}$$

由于 $f(x)$ 的周期性，在微分方程中，若 $y(x)$ 为该方程的解，则 $y(x+T)$ 也为方程的解：

$$y'(x+T)+y(x+T)=f(x+T)=f(x). \tag{203}$$

已知 $f(x+T)=f(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立，因此

$$\begin{aligned} y(x)&=\mathrm{e}^{-x}\left[y(0)+\int_0^x f(u+T)\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{u+T}\,\mathrm{d}(u+T)\right]\\ &\xlongequal{t=u+T}\mathrm{e}^{-x}\left[y(0)+\mathrm{e}^{-T}\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]. \end{aligned} \tag{204}$$

由于此时 $y(x)$ 仅由 $y(0)$ 取值决定，故研究 $y(0)$ 在此情况下的唯一取值：

$$y(x+T)-y(x) \tag{205}$$

$$\begin{aligned} =&\mathrm{e}^{-(x+T)}\left[y(0)+\int_0^{x+T} f(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right]-\mathrm{e}^{-x}\left[y(0)+\mathrm{e}^{-T}\int_T^{x+T} f(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right]\\ =&\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_0^T f(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u-\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-T})y(0)=0, \end{aligned} \tag{206}$$

从中解得

$$y(0)=\frac{1}{\mathrm{e}^T-1}\int_0^T f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \tag{207}$$

是唯一的，从而该方程的解唯一.

5. 首先证明该数列各项为正：当 $n=1$ 时，$x_1>0$ 成立. 假定当 $n=k$ 时，$x_k>0$，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\ln[(\mathrm{e}^{x_k}-1)/x_k]>\ln 1=0$. 故对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，均有 $x_n>0$.
下面研究该数列是否单调：记 $f(x)=\ln[(\mathrm{e}^x-1)/x]-x\ (x>0)$，则

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}-1=\frac{x+1-\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x-1)}<0\quad(x>0), \tag{208}$$

因此 $f(x)$ 单调减，满足 $f(x)<\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，从而 $x_{n+1}=x_n+f(x_n)<x_n$. 可见该数列单调递减，且有下界 0，因此该数列存在极限 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 对递推方程两端取 $n\to\infty$ 的极限得

$$0=\ln\frac{\mathrm{e}^A-1}{A}-A=f(A)=0. \tag{209}$$

已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上仅在原点处取零[8]，即 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

[8] 补充 $x=0$ 处函数定义即可

8 2017 年真题解答

1. 选择题

1. $f(x)$ 连续意味着

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = b, \tag{210}$$

即 $ab = 1/2$，选择 A.

2. 记 $g(x) = f^2(x)$，由题意，$g'(x) = 2f(x)f'(x) > 0$，因此 $g(1) > g(-1)$，即 $|f(1)| > |f(-1)|$，选择 C.

3. 由定义，

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f\Big|_{(1,2,0)} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (2xy, x^2, 2z)\Big|_{(1,2,0)} \cdot \frac{(1,2,2)}{3} = 2, \tag{211}$$

选择 D.

4. 第一段面积表示 $0 \sim 10$ s 内甲比乙多走 10 m，第二段面积表示 $10 \sim 25$ s 内乙比甲多走 20 m，此时甲超前乙的距离为 $10 + 10 - 20 = 0$ m，即 $t_0 = 25$ s 时两者相遇，选择 C.

2. 填空题

1. 由于 $f(x)$ 为偶函数，其奇数阶导为奇函数，故 $f^{(3)}(0) = 0$.

2. 其特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$，该方程的解为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$，因此方程通解为 $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x\right)$.

3. 该描述等价于该曲线积分关于 D 内任一闭曲线 L 积分值为 0，由 Stokes 定理，

$$0 = \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}x - ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1} = \iint_{D_1} \frac{2(a+1)xy}{(x^2+y^2-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{212}$$

因此 $a = -1$.

4. 记该幂级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}. \tag{213}$$

3. 解答题

1. 记 $f_1' = \dfrac{\partial f}{\partial u}$，$f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial v}$，则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^x f_1' - \sin x f_2', \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \mathrm{e}^{2x} f_{11}'' - 2\mathrm{e}^x \sin x f_{12}'' + \sin^2 x f_{22}'' + \mathrm{e}^x f_1' - \cos x f_2', \end{aligned} \tag{214}$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = f_1'(1,1)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = f_{11}''(1,1) + f_1'(1,1) - f_2'(1,1)$.

2. 此为求和型极限，因此尝试凑仅含 k/n 的项[9]：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x}$$
$$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{4}. \tag{215}$$

3. 方程两端关于 x 求导：

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0\quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}. \tag{216}$$

$y(x)$ 取极值要求 $y'(x)=0$，从上式解得 $x=\pm1$. 因此当 $|x|>1$ 时，$y'<0$，$y(x)$ 单调减；当 $|x|<1$ 时，$y'>0$，$y(x)$ 单调增. 因此 $x=-1$ 处为极小值，$x=1$ 处为极大值.

4. (a). 题设条件暗含 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)/x$ 存在的条件，记该极限为 $A<0$，因此当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=Ax+o(x)$. 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 内二阶导连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=A<0. \tag{217}$$

这意味着对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时，满足 $|f(x)/x-A|<\varepsilon$，即 $f(x)<(A+\varepsilon)x$. 可取 $\varepsilon=-A/2$，则 $f(\delta/2)<A\delta/4<0$. 又因为 $f(1)>0$，由零点存在定理，$\exists x_0\in(\delta(A)/2,1)$，使得 $f(x_0)=0$.

(b). 方程左端可写为 $f(x)f'(x)$ 的全微分，可进一步写为 $f^2(x)$ 的二阶微分，故记 $g(x)=f^2(x)$ $(0\leqslant x\leqslant1)$，相当于证明 $g''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两根. 由第 (1) 问的结论，$g(x_0)=g'(x_0)=0$ 且 $g(0)=g'(0)=0$，因此由 Rolle 定理，$\exists\eta,\xi_1\in(0,x_0)$，使得 $g'(\eta)=0$ 且 $g''(\xi_1)=0$. 再次由 Rolle 定理，$\exists\xi_2\in(0,\eta)$，使得 $g''(\xi_2)=0$. 因此 $g''(x)=2\{[f(x)f''(x)+f'(x)]^2\}$ 在 $(0,1)$ 上至少有个零点 ξ_1,ξ_2，证毕.

5. (a). 拆分后，可知圆锥面为基底，柱面控制边界，因此 S 为锥面的一部分，其在 xOy 平面上的投影边界为 $z^2=x^2+y^2=2x$，即投影区域 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leqslant1\}$.

(b). 将面元 $\mathrm{d}S$ 投影到 xOy 平面上时，两者满足关系

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{218}$$

该截面的质量为

$$M(S)=\iint_S\mu\,\mathrm{d}S=9\iint_D\sqrt{x^2+y^2+(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}18\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho=48\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=64. \tag{219}$$

[9]分部积分技巧思路见讲义

9 2016 年真题解答

1. 选择题

1. 在 $(0,1)$ 上，$1+x\approx 1\ (x\to 0^+)$，无贡献，因此该积分收敛条件为 $a<1$；在 $(1,+\infty)$ 上，$1+x\sim x\ (x\to+\infty)$，因此该积分收敛条件为 $a+b>1$. 选择 C.
2. 可验证 $f(x)$ 连续. 记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则当 $x<1$ 时，

$$F(x)=F(1)+\int_1^x 2(u-1)\,\mathrm{d}u=(x-1)^2+F(1), \tag{220}$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$F(x)=F(1)+\int_1^x \ln u\,\mathrm{d}u=x(\ln x-1)+1+F(1), \tag{221}$$

对比形式，$F(1)=0$ 时选择 D.
3. 大题中比较规范且一般的写法为代入两解解关于 $p(x),q(x)$ 的代数方程. 在小题中，若知道非齐次方程解的结构为齐次通解 + 非齐次特解，可显著简化计算. 对比两解形式可知，$y^*=(1+x^2)^2$ 为非齐次特解，$\bar{y}=C\sqrt{1+x^2}$ 为齐次通解，其中 C 为待定常数，因此

$$0=\bar{y}'+p(x)\bar{y}=C\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)\sqrt{1+x^2}\right]\quad\Longrightarrow\quad p(x)=-\frac{x}{1+x^2}, \tag{222}$$

进而

$$q(x)=(y^*)'+p(x)y^*=4x(1+x^2)-\frac{x}{1+x^2}\cdot(1+x^2)^2=3x(1+x^2), \tag{223}$$

选择 A.
4. 当 $1/(n+1)<x\leqslant 1/n$ 时，令 $n\to\infty$，由夹逼准则，$x\to 0^+$ 且 $f(x)\to 0^+$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，排除 A 和 B. 另一方面，

$$1\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{nx}<1+\frac{1}{n}. \tag{224}$$

令 $n\to\infty$，由夹逼准则，$x\to 0^+$ 且上述比值趋于 1，由定义，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'_-(1), \tag{225}$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，选择 D.

2. 填空题

1. 此为变上限积分型极限，处理方法为 L'Hospital 法则：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}. \tag{226}$$

2. 由定义，$\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=(0,1,y-1)$.

3. 对该方程两端取微分得

$$z\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}y=2xf(x-z,y)\,\mathrm{d}x+x^2[f_1'\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}z)+f_2'\,\mathrm{d}y]. \tag{227}$$

代入 $(x,y)=(0,1)$ 得 $z=1$，进而

$$\mathrm{d}x+\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}-2\,\mathrm{d}y=0\quad\Longrightarrow\quad\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y. \tag{228}$$

4. 显然直接求解三阶导十分麻烦，可考虑将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开成 Taylor 级数. 由于

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\quad\Longrightarrow\quad\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \tag{229}$$

同时

$$\frac{x}{1+ax^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-ax^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n x^{2n+1}, \tag{230}$$

因此

$$f'''(0)=3!\cdot(-1)^1\left(\frac{1}{3}-a\right)=1\quad\Longrightarrow\quad a=\frac{1}{2}. \tag{231}$$

3. 解答题

1. 直接积分即可：

$$\begin{aligned}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}\rho^2\,\mathrm{d}\rho=\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta+3\cos\theta+3)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)+3B\left(\frac{1}{2},2\right)+3B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right]\\&=\frac{8}{3}\left(\frac{3\pi}{8}+3\cdot\frac{4}{3}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=5\pi+\frac{32}{3}.\end{aligned} \tag{232}$$

2. (a). 该二阶齐次常系数线性方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0$，解得 $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k^2}<0\ (0<k<1)$，故该方程通解为 $y(x)=A\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+B\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. 由于当 $\lambda<0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}\right|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\lambda} \tag{233}$$

收敛，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{A}{\lambda_1}-\frac{B}{\lambda_2}$ 收敛.

(b). 由题意，$y(0)=A+B=1$, $y'(0)=\lambda_1A+\lambda_2B=1$，从中解得

$$A=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\quad B=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, \tag{234}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x&=-\frac{A}{\lambda_1}-\frac{B}{\lambda_2}=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}-\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\\&=\frac{1-(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{1-(-2)}{k}=\frac{3}{k}.\end{aligned} \tag{235}$$

3. 由题意，积分得

$$f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+g(y)\quad\Longrightarrow\quad f(0,y)=g(y)=y+1, \tag{236}$$

因此 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$，则

$$I(t)=\int_{L_t}\mathrm{d}f(x,y)=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t. \tag{237}$$

由于 $I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1$，则 $t<2$ 时 $I'(t)<0$，$I(t)$ 单调减，$t>2$ 时 $I'(t)>0$，$I(t)$ 单调增. 故 $I(t)\geqslant I(2)=1+2=3$.

4. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}I&=\iiint_\Omega(2x-2+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{2(1-x-z)}\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1(2x+1)\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-z)\,\mathrm{d}z=\int_0^1(2x+1)(1-x)^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(2x^3-3x^2+1)\,\mathrm{d}x=\frac12-1+1=\frac12.\end{aligned} \tag{238}$$

5. (a). 注意到

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=\int_{x_{n-1}}^{x_n}f'(x)\,\mathrm{d}x\quad(n=2,3,\cdots). \tag{239}$$

I. 若 $x_2>x_1$，则当 $n=2$ 时，

$$0<x_3-x_2=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\,\mathrm{d}x<\frac12(x_2-x_1) \tag{240}$$

成立. 假定当 $n=k$ 时 $0<x_{k+1}-x_k<(x_2-x_1)/2^{k-1}$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$0<x_{k+2}-x_{k+1}=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f'(x)\,\mathrm{d}x<\frac{x_{k+1}-x_k}{2}<\frac{x_2-x_1}{2^k}, \tag{241}$$

故对于 $\forall n\in\{2,3,\cdots\}$，均有 $0<x_{n+1}-x_n<(x_2-x_1)/2^{n-1}$.

II. 若 $x_2<x_1$，仿上可证明对于 $\forall n\in\{2,3,\cdots\}$，均有 $0<x_n-x_{n+1}<(x_1-x_2)/2^{n-1}$.

综上，$|x_{n+1}-x_n|<|x_2-x_1|/2^{n-1}$，而 $|x_2-x_1|+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{|x_2-x_1|}{2^{n-1}}=2|x_2-x_1|$ 收敛，故该级数绝对收敛.

(b). 由上一问的讨论，一旦 x_1,x_2 的大小关系确定，该级数必定单调，且 $0<x_n<2$，故该数列有极限，记极限为 A. 在递推公式两端令 $n\to\infty$，则有方程 $f(A)=A$. 记 $g(x)=f(x)-x$，考虑到

$$g(0)=f(0)=1>0,\quad g(2)=f(0)+\int_0^2f'(x)\,\mathrm{d}x-2<1+2\cdot\frac12-2=0, \tag{242}$$

同时 $g'(x)=f'(x)-1<-1/2<0$，结合 $g(x)$ 的单调减性与零点存在定理，该函数存在唯一介于 0 和 2 间的零点. 又 $g(A)=f(A)-A=0$，故 A 为该零点，且 $0<A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

10 2015 年真题解答

1. 选择题

1. 拐点即函数二阶导符号发生改变的点，由图像可知，该点仅有一个，选择 B.
2. 出现了 $x\mathrm{e}^x$ 项，且为常系数方程，故 $y^*=x\mathrm{e}^x$ 必为特解，$\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}$ 为两个通解，则 $a=-1-2=-3$, $b=1\cdot 2=2$，从而

$$c\mathrm{e}^x=(y^*)''-3(y^*)'+2y^*=[(x+2)-3(x+1)+2x]\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x \quad\Longrightarrow\quad c=-1, \tag{243}$$

选择 A.

3. 作为小题，可取 $a_n=(-1)^{n-1}/n$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^n$，容易计算其收敛半径为 $R=1$，从而 $\sqrt{3}$ 和 3 分别为其收敛点和发散点，选择 B.

   注 以下为严格证明：当 $x=\sqrt{3}$ 时，由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得当 $n>N$ 时，$|a_n|<\varepsilon$. 因此对 $\forall p\in\mathbb{N}^*$，均有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{N+p}na_n\left(\sqrt{3}-1\right)^n\right|&\leqslant\sum_{n=N+1}^{N+p}\frac{n|a_n|}{\left(\sqrt{3}+1\right)^n}\\&<\frac{2\varepsilon}{\left(\sqrt{3}-1\right)^{N+2}}\left[1-\left(1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}p\right)\left(\sqrt{3}-1\right)^p\right].\end{aligned}\tag{244}$$

   当 $p\to\infty$ 时，$p\left(\sqrt{3}-1\right)^p\to 0$，因此不等号最右侧有上界，由 Cauchy 收敛准则，该级数收敛. 当 $x=3$ 时，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n2^n=0$，即对于 $\forall\varepsilon>0$，均 $\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得当 $n>N$ 时，$|na_n2^n|<\varepsilon$. 因此对 $\forall p\in\mathbb{N}^*$，均有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p}a_n\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{N+p}|a_n|<\varepsilon\sum_{n=N+1}^{N+p}\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{\varepsilon}{2^{N+1}}<\varepsilon,\tag{245}$$

   由 Cauchy 收敛准则，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，但这与题设条件矛盾，故假设不成立，即 na_n2^n 在 $n\to\infty$ 时不以 0 为极限，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n2^n$ 发散.

4. 选项中可看出是从平面直角坐标系中换到极坐标系中，边界 $k_1xy=1$, $y=k_2x$ 分别变为 $k_1r^2\sin\theta\cos\theta=1$, $\sin\theta=k_2\cos\theta$. 由于 $k_1,k_2,r>0$，解得 $\theta\in(0,\pi/2)$，从而 $1\leqslant\tan\theta\leqslant\sqrt{3}$，解得 $\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/3$. 相应地，$1/\sqrt{2\sin 2\theta}\leqslant r\leqslant 1/\sqrt{\sin 2\theta}$，选择 B.

2. 填空题

1. 利用 L'Hospital 法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}.\tag{246}$$

2. 注意到积分区间为对称区间，可考虑函数的奇偶性（或加和为常数等对称性）. 注意到被积函数第一项为奇函数，其积分贡献为 0，舍去，则积分结果为 $2\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \pi^2/4$.

3. 对方程两端求一阶微分：

$$\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z + (xy\,\mathrm{d}z + zx\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}x) + \mathrm{d}x - \sin x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{247}$$

代入 $(x, y) = (0, 1)$，可得 $z = 0$，因此

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)} + \mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}z\Big|_{(0,1)} = -\,\mathrm{d}x\,. \tag{248}$$

4. 直接积分：

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1-x-y)(3-x+y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} [-y^2 - 2y + (3-x)(1-x)]\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^2[-(1-x) - 3 + 3(3-x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^2(5-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^1 (-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2} + 3 - 6 + 5\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{249}$$

3. 解答题

1. 当 $x \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + a\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + bx\left[x + o(x^3)\right] \\
&= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3),
\end{aligned} \tag{250}$$

由题意，$f(x)$ 与 $g(x) = kx^3$ 在 $x \to 0$ 时为等价无穷小，对比系数解得 $a = -1$, $b = -1/2$, $k = a/3 = -1/3$.

2. 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$，已知 $f'(x_0) > 0$. 该直线在 x 轴上的截距为 $x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$，因此区域面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)| = \frac{f^2(x)}{2f'(x)} = 4 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{x}{8}. \tag{251}$$

代入初始条件 $f(0) = 2$ 解得 $f(x) = 8/(4-x)$ $(x \neq 4)$. 检验可知 $f'(x) = 8/(4-x)^2 > 0$，故定义域 $I = \mathbb{R}/\{4\}$.

3. 曲线 C 的方程可改写为 $(x+y)^2 = 3 + xy$，则 $f(x, y)$ 在 C 上的最大方向导数为自身梯度，即

$$\begin{aligned}
|\nabla f| &= |(1+y, 1+x)| = \sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 2xy + 2(x+y) + 2} \\
&= \sqrt{(x+y)^2 - 2[(x+y)^2 - 3] + 2(x+y) + 2} = \sqrt{-(x+y)^2 + 2(x+y) + 8} \leqslant 3,
\end{aligned} \tag{252}$$

等号成立当且仅当：(1)$\begin{cases} x+y=1, \\ 3+xy=(x+y)^2=1 \end{cases}$ 成立，解得 $(x,y)=(2,-1)$ 或 $(-1,2)$.

(2) 此时 $\nabla f=(3,0)$ 或 $(0,3)$，要求方向导数的方向与此时梯度一致.

4. (a). 由定义，

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x). \end{aligned} \tag{253}$$

(b). $f'(x)=\sum_{i=1}^{n} D_i f(x)$，其中 D_i 表示仅对 $f(x)$ 中第 i 个函数 $u_i(x)$ 求导.

5. 将曲线方程的方程组消去 z 得 $x^2+y^2/2=1$，因此记 $z=x=\cos\theta$, $y=\sqrt{2}\sin\theta$，则 θ 从 $\pi/2$ 到 $-\pi/2$ 以满足 $z\geqslant 0$. 利用三角函数的奇偶性，代入积分式得：

$$\begin{aligned} I &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\left(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta\right)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta-2\sin^3\theta\cos^2\theta\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2}\sin^2\theta=\sqrt{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{254}$$

11 2014 年真题解答

1. $x \to \infty$ 时，选项 A 和 B 中的正弦项振荡，不存在渐近线，排除. 选项 D 中函数以非线性的方式发散到无穷，不存在渐近线，排除. 最终选择 C.
2. 记 $h(x) = g(x) - f(x)$，则

$$h'(x) = [f(1) - f(0)] - f'(x), \quad h''(x) = -f''(x), \tag{255}$$

因此当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$h''(x) \leqslant 0$，$h'(x)$ 单调减. 注意到 $h(0) = h(1) = 0$，由 Rolle 定理，$\exists x_0 \in (0,1)$，使得 $h'(x_0) = 0$. 又因为 $h'(x)$ 单调减，这样的 x_0 唯一，即 $0 < x < x_0$ 时 $h'(x) > 0$，$h(x)$ 单调增；$x_0 < x < 1$ 时 $h'(x) < 0$，$h(x)$ 单调减. 因此在 $[0,1]$ 内，$h(x) \leqslant \max\{h(0), h(1)\} = 0$，即 $f(x) \geqslant g(x)$，选择 C.
3. 积分区域为 $D = \{(x,y) | -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. 作图可知 D 在第一象限内为直线 $y = -x + 1$ 与坐标轴围成的面积，在第二象限内为 $1/4$ 圆. 选项 A，第一项积分 y 的积分上限为 $1 - x$，排除. 选项 B，第二项积分 y 的积分限为 $[0, \sqrt{1-x^2}]$，排除. 变换到极坐标中，直接看选项，两者区别仅为选项 C 面元缺少 r，排除. 最终选择 D.
4. 展开后，$x\cos x, \sin x \cos x$ 项为奇函数，对积分结果无贡献，其余项展开：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1 \sin x)^2 \,\mathrm{d}x \\
=&2\int_0^{\pi} (x^2 + a_1^2\cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x - 2b_1 x \sin x)\,\mathrm{d}x \\
=&2\left(\frac{\pi^3}{3} + a_1^2 \cdot \frac{\pi}{2} + b_1^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4b_1\, x\cos x\Big|_0^{\pi} - 4b_1 \int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x \\
=&\pi a_1^2 + \pi(b_1 - 2)^2 + \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi,
\end{aligned} \tag{256}$$

当上述积分取最小值时，$a_1 = 0,\ b_1 = 2$，选择 A.

2. 填空题

1. 切平面法向量

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \left.(z_x, z_y, -1)\right|_{(1,0,1)} = (2, -1, -1), \tag{257}$$

因此切平面方程为

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (x-1, y, z-1) = 2(x-1) - y - (z-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - y - z = 1. \tag{258}$$

2. 由题意，

$$f(7) = f(-1) = -f(1) = -f(0) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{259}$$

3. 该方程为一阶齐次方程，故令 $u = y/x$，则 $y' = u + xu'$，代入得

$$xu' + u - u\ln u = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{260}$$

代入 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 即 $u(1)=\mathrm{e}^3$，解得方程的特解为 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln 2$，因此

$$u(x)=\mathrm{e}^{2x+1}\quad\Longrightarrow\quad y(x)=xu(x)=x\mathrm{e}^{2x+1}. \tag{261}$$

4. 该曲线为正向，由 Stokes 定理，

$$\begin{aligned}\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z&=\iint_D(1,1,0)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint_D(1,1,0)\cdot\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D\sqrt{1+0+1^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\cdot 1^2=\pi.\end{aligned} \tag{262}$$

3. 解答题

1. 此为变上限积分型极限，采用 L'Hospital 法则与等价无穷小：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{1/t}-1)-t]\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{1/x}-1)-x]\\&\xlongequal{y=1/x}\lim_{y\to0^+}\frac{\mathrm{e}^y-y-1}{y^2}=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{263}$$

2. 对方程两端关于 x 求导：

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0\quad\Longrightarrow\quad y'=-\frac{y(2x+y)}{x^2+2xy+3y^2}, \tag{264}$$

$y(x)$ 取极值时满足 $y=0$ 或 $2x+y=0$.

(a). 若 $y=0$，代入原方程得 $6=0$，方程不可能成立，故 $y=0$ 并不在曲线上.

(b). 若 $2x+y=0$，代入原方程得

$$0=-8x^3+4x^3-2x^3+6=6-6x^3\quad\Longrightarrow\quad x=1\quad\Longrightarrow\quad y=-2. \tag{265}$$

由于不存在 $y=0$ 的点但存在 $y=-2$ 的点，故 $y<0$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立. 注意到方程可改写为关于 x 的一元二次方程：

$$yx^2+y^2x+(y^3+6)=0\quad\Longrightarrow\quad\Delta=y^4-4y(y^3+6)=-3y(y^3+8)\geqslant 0. \tag{266}$$

已证明 $y<0$ 恒成立，因此要求 $y\geqslant-2$，即 $x=1$ 时，y 取最小值也即极小值 -2.

3. 由题意，

$$\begin{aligned}\nabla^2z&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^x\cos y f'(\mathrm{e}^x\cos y)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\mathrm{e}^x\sin y f'(\mathrm{e}^x\cos y)\right]\\&=\mathrm{e}^{2x}f''(\mathrm{e}^x\cos y)=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned} \tag{267}$$

记 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，则微分方程简化为

$$f''(u)=4z+u=4f(u)+u\quad\Longrightarrow\quad f(u)=A\mathrm{e}^{2u}+B\mathrm{e}^{-2u}-\frac{u}{4}. \tag{268}$$

代入

$$\begin{cases}f(0)=A+B=0,\\f'(0)=2A-2B-1/4=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad A=-B=1/16\quad\Longrightarrow\quad f(u)=\frac{1}{8}\sinh u-\frac{u}{4}. \tag{269}$$

4. 对于第二类曲面积分，联想 Gauss 定理，先补面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant 1,\ z=1\}$，其法向量沿 z 轴正向. 由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\iint_D \vec{\boldsymbol{A}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} - I = -I &= \iint_{-\Sigma+D} \vec{\boldsymbol{A}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \\ &= \iiint_\Omega [3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned} \tag{270}$$

由于该区域关于 zOx 平面、yOz 平面均对称，故 x,y 在 Ω 内的积分贡献为零. 取柱坐标系，积分式改写为

$$\begin{aligned} I = -\iiint_\Omega (3x^2+3y^2+7)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= -2\pi\int_0^1 (3\rho^2+7)\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho^2}\mathrm{d}z \\ \xlongequal{u=\rho^2} -\pi\int_0^1 (3u+7)u\,\mathrm{d}u &= -\pi\left(1+\frac{7}{2}\right) = -\frac{9\pi}{2}. \end{aligned} \tag{271}$$

5. (a). 由于 $a_n>0$，故 $\cos b_n=\cos a_n - a_n<\cos a_n$，即 $0<a_n<b_n$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

(b). 注意到 $n\to\infty$ 时，$b_n\pm a_n\to 0$，因此

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{2}{b_n}\sin\frac{b_n+a_n}{2}\sin\frac{b_n-a_n}{2}<\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}, \tag{272}$$

从而有

$$0<\frac{a_n}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}\left(1+\frac{a_n}{2}\right)<\frac{b_n}{2}, \tag{273}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.