数学分析 B2 第八次习题课

邓嘉驹

更新：May 31, 2024

目录

1 场论基础 **2**

1.1 坐标变换 2

1.2 场的微分 3

1.3 场的积分 5

1.4 正交曲线坐标系 6

1.5 Dirac-δ 函数 8

1.6 Helmholtz 定理 10

1.7 选做练习 11

2 作业选讲 **12**

3 教材习题 **12**

4 真题集萃 **14**

1 场论基础

1.1 坐标变换

1. Einstein 求和约定

在求和式中，求和指标即哑指标，其余不被求和的指标称为自由指标. 这些指标具有以下性质：

1. 哑指标可以替换为任意其他字母，例如在矩阵乘法中，

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_l A_{il}B_{lj}. \tag{1.1}$$

2. 若 A 反对称、S 对称，即 $A_{ij} = -A_{ji}, S_{ij} = S_{ji}$，则 $\sum\limits_{i,j} A_{ij}S_{ij} = 0$.

Einstein 求和约定为：若同一指标在同一单项式中重复出现，则默认对其求和，例如矩阵乘法中，

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} \xrightarrow{\text{Einstein 求和约定}} A_{ik}B_{kj}. \tag{1.2}$$

2. Kronecker 符号与 Levi-Civita 符号

Kronecker 符号定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.3}$$

其性质有

$$\delta_{ii} = 3, \quad A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik}, \quad A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = \mathrm{tr}(A). \tag{1.4}$$

Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1) \text{ or } (3,1,2), \\ -1, & (i,j,k) = (1,3,2), (2,1,3) \text{ or } (3,2,3), \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{1.5}$$

其性质有

1. 完全反对称：$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$.
2. 3×3 矩阵的行列式：

$$\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} = \varepsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk} = \varepsilon_{lmn}\det(A). \tag{1.6}$$

3. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$（相当重要的公式！）.

3. 右手直角坐标系

1. 基矢：$\hat{\boldsymbol{x}}_i\ (i=1,2,3)$，满足

$$\left.\begin{aligned} \text{正交：}\ \hat{\boldsymbol{x}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_j&=\delta_{ij},\\ \text{右手：}\ \hat{\boldsymbol{x}}_i\times\hat{\boldsymbol{x}}_j&=\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{x}}_k \end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad(\vec{\boldsymbol{x}}_i\times\hat{\boldsymbol{x}}_j)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_k=\varepsilon_{ijk}. \tag{1.7}$$

2. 坐标：$x_i=\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_i$.
3. 位矢：$\vec{\boldsymbol{r}}=x_i\hat{\boldsymbol{x}}_i=(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

4. 转动变换

1. 新、旧基矢间的关系：

$$\hat{\boldsymbol{x}}'_i=(\hat{\boldsymbol{x}}'_i\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_j)\hat{\boldsymbol{x}}_j=R_{ij}\hat{\boldsymbol{x}}_j, \tag{1.8}$$

2. 新、旧坐标间的关系：

$$x'_i=\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}'_i=(x_j\hat{\boldsymbol{x}}_j)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}'_i=R_{ij}x_j. \tag{1.9}$$

若新坐标系亦为右手直角系，则

$$\delta_{ij}=\hat{\boldsymbol{x}}'_i\cdot\hat{\boldsymbol{x}}'_j=(R_{ik}\hat{\boldsymbol{x}}_k)\cdot(R_{jl}\hat{\boldsymbol{x}}_l)=\delta_{kl}R_{ik}R_{jl}=R_{ik}R_{kl}=(RR^T)_{ij}, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}&=(\hat{\boldsymbol{x}}'_i\times\hat{\boldsymbol{x}}'_j)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}'_k=[(R_{il}\hat{\boldsymbol{x}}_l)\times(R_{jm}\hat{\boldsymbol{x}}_m)]\cdot(R_{kn}\hat{\boldsymbol{x}}_n)\\&=\varepsilon_{lmn}R_{il}R_{jm}R_{kn}=\varepsilon_{ijk}\det(R),\end{aligned} \tag{1.11}$$

因此要求旋转矩阵 R 为一行列式为 $+1$ 的正交矩阵.

1.2 场的微分

1. 梯度算子

梯度算子（或称 Nabla 算子）定义为

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{x}}_i\partial_i \tag{1.12}$$

其同时具有一阶线性微分算子的性质（满足 Leibniz 法则、链式法则）与矢量算子的性质.

2. 场的一阶导数

标量场 φ 的梯度定义为

$$\nabla\varphi=\hat{\boldsymbol{x}}_i\partial_i\varphi \tag{1.13}$$

矢量场的梯度、散度、旋度分别定义为

$$\nabla\vec{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{x}}_i\hat{\boldsymbol{x}}_j(\partial_iA_j),\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=\partial_iA_i,\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{x}}_i(\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k). \tag{1.14}$$

特别地，对于三维空间中的位矢 $\vec{\boldsymbol{r}}$，记其模长 $r=|\vec{\boldsymbol{r}}|$，则有

$$\nabla r=\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}\triangleq\hat{\boldsymbol{r}},\quad \nabla\vec{\boldsymbol{r}}=\overleftrightarrow{I},\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{r}}=3,\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{r}}=0, \tag{1.15}$$

其中 $\overleftrightarrow{I}$ 为二阶单位张量，在三维空间中可理解为 3×3 的单位矩阵.

3. Leibniz 法则

1. $\nabla(\varphi\psi)=\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi$.
2. $\nabla(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})=\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{B}}+\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\nabla\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{A}}\times\nabla\vec{\boldsymbol{B}}+\vec{\boldsymbol{B}}\times\nabla\vec{\boldsymbol{A}}$.
3. $\nabla(\varphi\vec{\boldsymbol{A}})=(\nabla\varphi)\vec{\boldsymbol{A}}+\varphi\nabla\vec{\boldsymbol{A}}$.
   $\nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{A}})=\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$.
   $\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{A}})=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{A}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$.
4. $\nabla(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})=(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})\times\vec{\boldsymbol{B}}-(\nabla\vec{\boldsymbol{B}})\times\vec{\boldsymbol{A}}$.
   $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})=(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\vec{\boldsymbol{B}}-(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$.
   $\nabla\times(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})=(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}+\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{A}}-(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\nabla)\vec{\boldsymbol{B}}$.

其中第二式非常特殊，不能直接用 Leibniz 法则理解（否则会漏掉后两项旋度项）.

这里不采用定义严格证明，而是通过 Leibniz 法则半说明以帮助理解记忆公式.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{A}})&=\nabla_\varphi(\varphi\times\vec{\boldsymbol{A}})+\nabla_A\big(\varphi\times\vec{\boldsymbol{A}}\big)\\&=(\nabla_\varphi\varphi)\times\vec{\boldsymbol{A}}+\varphi\times(\nabla_A\times\vec{\boldsymbol{A}})\\&=(\nabla\varphi)\times\vec{\boldsymbol{A}}+\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}},\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})&=\nabla_A\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})+\nabla_B\cdot(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})\\&=\vec{\boldsymbol{B}}\cdot(\nabla_A\times\vec{\boldsymbol{A}})-\nabla_B\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{A}})\\&=(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\vec{\boldsymbol{B}}-(\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}})\cdot\vec{\boldsymbol{A}},\end{aligned} \tag{1.17}$$

其中 $\nabla_\varphi,\nabla_A,\nabla_B$ 分别表示只作用在 $\varphi,\vec{\boldsymbol{A}},\vec{\boldsymbol{B}}$ 上的 Nabla 算子.

4. 链式法则

若标量场 $\varphi=\varphi(f)$、矢量场 $\vec{\boldsymbol{A}}=\vec{\boldsymbol{A}}(f)$，其中 $f=f(\vec{\boldsymbol{r}})$，则

$$\nabla\varphi=\varphi'\nabla f,\quad \nabla\vec{\boldsymbol{A}}=\vec{\boldsymbol{A}}'\nabla f,\quad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=\vec{\boldsymbol{A}}'\cdot\nabla f,\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=\vec{\boldsymbol{A}}'\times\nabla f. \tag{1.18}$$

特别地，

$$\nabla f(r)=f'(r)\hat{\boldsymbol{r}},\quad \nabla\times[f(r)\hat{\boldsymbol{r}}]=0. \tag{1.19}$$

5. 场的二阶导数

1. 恒等式：

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = 0. \tag{1.20}$$

2. Laplace 算子：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i. \tag{1.21}$$

6. Taylor 展开[1]

1. 单变量函数：

$$\varphi(x+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\delta^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\right]\varphi = \exp\left(\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\varphi. \tag{1.22}$$

2. 标量场：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\delta}}) &= \exp\left(\delta_1 \partial_i\right) \exp(\delta_2 \partial_2) \exp(\delta_3 \partial_3)\varphi = \exp\left(\delta_i \partial_i\right)\varphi = \exp\left(\vec{\boldsymbol{\delta}} \cdot \nabla\right)\varphi \\ &= \left[1 + \vec{\boldsymbol{\delta}} \cdot \nabla + \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{\delta}} \cdot \nabla)^2 + \cdots\right]\varphi.\end{aligned} \tag{1.23}$$

特别地，原点附近微分中值定理可利用梯度算符简写为

$$f(\vec{\boldsymbol{r}}) - f(0,0) = \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla f(\theta \vec{\boldsymbol{r}}), \quad \theta \in (0,1). \tag{1.24}$$

1.3 场的积分

1. 梯度积分的基本定理

考虑任一梯度场[2]$\nabla\blacksquare$ 在曲线 L 上的积分，L 的起点与终点分别为 P, Q，则

$$\int_L \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \nabla\blacksquare = \blacksquare\Big|_P^Q. \tag{1.25}$$

例如对于标量场 φ 与 $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$，其结果分别为

$$\int_L \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \nabla\varphi = \varphi(Q) - \varphi(P), \quad \int_L \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \nabla(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}\Big|_P^Q. \tag{1.26}$$

对于向量场 $\vec{\boldsymbol{A}}$，其结果为

$$\int_L \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}(Q) - \vec{\boldsymbol{A}}(P). \tag{1.27}$$

[1] 实际上称为 Taylor 级数更合适，不过将该级数在某处阶段成多项式基本亦可得 Taylor 展开，故不加以区别
[2] 例如标量场、矢量场、张量场，以后未指定具体场的场均认为对任意场成立

2. 散度积分的基本定理

考虑任一散度场 $\nabla\cdot\blacksquare$ 在区域 Ω 内的积分，则

$$\int_\Omega \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\blacksquare=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\blacksquare. \tag{1.28}$$

1. 记 $\vec{\boldsymbol{c}}$ 为常矢量，分别令 $\blacksquare=\varphi\vec{\boldsymbol{c}}$, $\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{c}}$，可得

$$\int_\Omega \mathrm{d}V\,\nabla\varphi=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\,\varphi,\quad \int_\Omega\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\times\vec{\boldsymbol{A}}. \tag{1.29}$$

特别地，$\displaystyle\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}=0$.

2. Green 恒等式.

(a). Green 第一公式：令 $\blacksquare=\varphi\nabla\psi$，可得

$$\int_\Omega \mathrm{d}V\,[\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi]=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\varphi\nabla\psi=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\sigma\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}. \tag{1.30}$$

(b). Green 第二公式：令 $\blacksquare=\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi$，可得

$$\int_\Omega \mathrm{d}V\,[\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi]=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)=\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}\right). \tag{1.31}$$

3. 旋度积分的基本定理

考虑任一旋度场 $\nabla\times\blacksquare$ 在曲面 Σ 上的积分，则

$$\int_\Sigma(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\times\nabla)\cdot\blacksquare=\int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\blacksquare. \tag{1.32}$$

1.4 正交曲线坐标系[3]

1. 正交曲线坐标系

在空间中一组曲线坐标系 (u_1,u_2,u_3) 中，空间线元可写为

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}}{\partial u_\alpha}\mathrm{d}u_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{3}(h_\alpha\,\mathrm{d}u_\alpha)\vec{\boldsymbol{u}}_\alpha, \tag{1.33}$$

对比后两个等号的表达式可定义 Lame 系数 h 与坐标基矢 $\vec{\boldsymbol{u}}_\alpha$

$$h_\alpha=\left|\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}}{\partial u_\alpha}\right|,\quad \vec{\boldsymbol{u}}_\alpha=\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}}{\partial u_\alpha}. \tag{1.34}$$

对于柱坐标，$h_\rho=1$, $h_\varphi=\rho$, $h_z=1$；对于球坐标，$h_r=1$, $h_\theta=r$, $h_\varphi=r\sin\theta$.

[3]本小节不采用 Einstein 求和约定

2. 场的梯度

由于

$$\mathrm{d}\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \sum_{\alpha=1}^{3} (\nabla\varphi)_\alpha h_\alpha \,\mathrm{d}u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\,\mathrm{d}u_\alpha\,, \tag{1.35}$$

因此

$$(\nabla\varphi)_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \nabla = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}. \tag{1.36}$$

3. 正交曲线坐标系中的重要矢量公式

正交曲线坐标系中的坐标基矢 $\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha$ 满足以下关系：

$$\nabla u_\alpha = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{h_\alpha}, \quad \nabla \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{h_\alpha} = 0, \quad \nabla \cdot \frac{h_\alpha \hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{H} = 0, \tag{1.37}$$

其中 $H = h_1h_2h_3$. 对于柱坐标系，

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.38}$$

对于球坐标系，

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{1.39}$$

证明. 1. 由定义可证明 $\nabla u_\alpha = \hat{\boldsymbol{u}}_\alpha$.

2. 利用场的二阶导数的恒等式

$$\nabla \times \nabla u_\alpha = \nabla \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{h_\alpha} = 0. \tag{1.40}$$

3. 记 $H = h_1h_2h_3$，则

$$\begin{aligned} \nabla u_1 \times \nabla u_2 &= \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_1}{h_1} \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_2}{h_2} = \frac{h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3}{H} \\ &= \nabla \times (u_1\nabla u_2) - u_1(\nabla \times \nabla u_2) = \nabla \times (u_1\nabla u_2), \end{aligned} \tag{1.41}$$

因此 $\nabla \cdot (h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3/H) = 0$，即 $\nabla \cdot (h_\alpha\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha/H) = 0$.

4. 场的散度

利用式(1.37)与梯度的定义可得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} &= \sum_{\alpha=1}^{3} \nabla \cdot (A_\alpha \vec{\boldsymbol{u}}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{3} \nabla\left(\frac{HA_\alpha}{h_\alpha} \cdot \frac{h_\alpha\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{H}\right) = \frac{1}{H}\sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha \cdot \nabla\left(\frac{HA_\alpha}{h_\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{H}\sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{HA_\alpha}{h_\alpha}\right) = \frac{1}{H}\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{HA_\alpha}{h_\alpha}\right), \end{aligned} \tag{1.42}$$

其中已利用坐标基矢正交的条件：$\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. 对于柱坐标系，

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{1.43}$$

对于球坐标系，

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \tag{1.44}$$

5. 场的旋度

利用式(1.37)与梯度的定义可得

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} &= \sum_{\beta=1}^{3} \nabla \times (A_\beta \hat{\boldsymbol{u}}_\beta) = \sum_{\beta=1}^{3} \nabla(h_\beta A_\beta) \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\beta}{h_\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} (\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha \times \hat{\boldsymbol{u}}_\beta) \cdot \frac{1}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial(h_\beta A_\beta)}{\partial u_\beta} \\ &= \frac{1}{H}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma \frac{\partial(h_\beta A_\beta)}{\partial u_\alpha}\hat{\boldsymbol{u}}_\gamma = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} h_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{1.45}$$

6. 场的 Laplace 算子

利用散度的定义式(1.42)可得

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \sum_{\alpha=1}^{3} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\right) = \frac{1}{H}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{H}{h_\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\right) \tag{1.46}$$

对于柱坐标系，

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{1.47}$$

对于球坐标系，

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.\end{aligned} \tag{1.48}$$

1.5 Dirac-δ 函数

1. 一维 δ 函数

对于行为良好[4]的函数 $\varphi(x)$，一维 Dirac-δ 函数及其 n 阶导定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a), \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\varphi^{(n)}(a), \tag{1.49}$$

[4]行为良好即 $\varphi(x)$ 无穷可微，并且当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x)$ 及其所有导数都比 $1/x^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 更快地趋于零

其中 $(-1)^n$ 可理解为对于 δ 函数“偶函数”的性质.

注 实际上，δ 函数并非通常意义上的函数，数学上将其称为“分布”，分布 F 是由其对任意行为良好的函数 $\varphi(x)$ 的作用 $F\{\varphi\}$ 定义的. 分布的导数 $\partial_x F$ 仍是一个分布，定义为 $(\partial_x F)\{\varphi\} = -F\{\partial_x \varphi\}$. 通常的函数 $f(x)$ 其实也可以视为一个分布 F：$F\{\varphi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

2. δ 函数的基本性质[5]

1. 量纲：$[\delta(x)] = [x]^{-1}$.
2. $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$.
3. $x^n\delta(x) = 0,\ x\delta'(x) = -\delta(x)$.
4. 若 $f(x)$ 只有若干单零点[6]$\{x_n\}$，则

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}. \tag{1.50}$$

特别地，$\delta(ax) = \delta(x)/|x|$，当 $a=-1$ 时 $\delta(-x) = \delta(x)$，即 δ 函数具有类似偶函数的性质.

3. δ 函数的形式定义与渐进行为

形式上，δ 函数可表述为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) = 1, \text{ and } \delta(x-x_0) = 0 \text{ when } x \neq x_0. \tag{1.51}$$

δ 函数也可以视为普通函数系的极限，即 $\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 或 $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x)$. 例如分别对函数 $f_n(x) = n\mathrm{e}^{-n^2x^2}/\sqrt{\pi}$, $f_n(x) = \sin nx/\pi x$, $f_\varepsilon(x) = \varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)$ 作图，可以得到如图 1所示的图线.

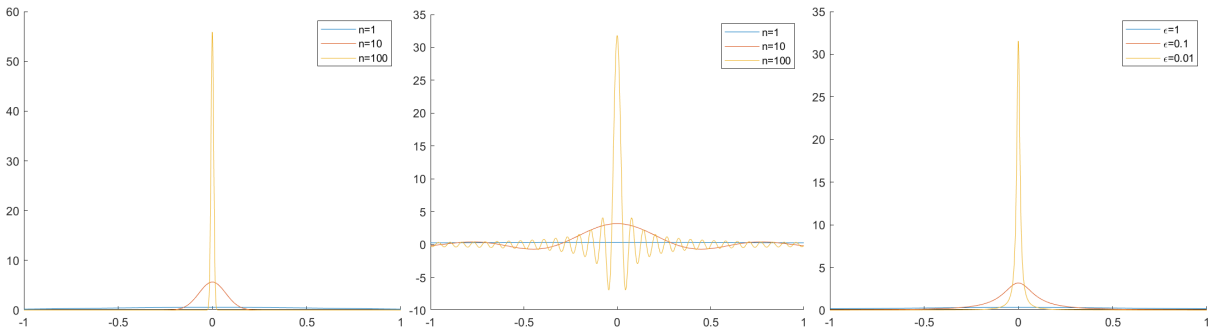


图 1: 三种函数在极限情况下对 δ 函数的趋近

[5]这些性质都可以通过定义进行积分证明
[6]即 $f(x_0) = 0$ 但 $f'(x_0) \neq 0$

4. Heaviside 阶跃函数

阶跃函数定义为 $\Theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其与 δ 函数的关系为

$$\Theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad\Longrightarrow\quad \delta(x)=\frac{\mathrm{d}\Theta(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{1.52}$$

5. 三维 δ 函数

三维 δ 函数的定义与一维情形类似：

$$\int_{\Omega_{\text{total}}}\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{r}}=\varphi(\vec{\boldsymbol{a}}),\quad \int_{\Omega_{\text{total}}}[\partial_i\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})]\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{r}}=-\partial_i\varphi(\vec{\boldsymbol{a}}), \tag{1.53}$$

其中 Ω_{total} 为全空间，其性质有

1. 量纲为 L^{-3}.
2. $f(\vec{\boldsymbol{r}})\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})=f(\vec{\boldsymbol{a}})\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})$.
3. $x_i\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})=x_ix_j\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $x_i\partial_j\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}})$.
4. 若 $f(\vec{\boldsymbol{r}})$ 仅有一个简单零点 $\vec{\boldsymbol{a}}$，则 $\delta^{(3)}(f(x))=\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})/|\det[\partial_i f(\vec{\boldsymbol{a}})]|$.

6*. 平方反比矢量场

最重要的结论是

$$\int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=4\pi \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=4\pi\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}), \tag{1.54}$$

其中 Ω 为任一包含原点的区域，由此可导出

$$\nabla\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=\frac{\overleftrightarrow{I}-3\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}}{r^3}+\frac{4\pi\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}})}{3}\overleftrightarrow{I}. \tag{1.55}$$

整合的结论如下：

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2},\quad \nabla^2\frac{1}{r}=-\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=-4\pi\delta^{(3)}(\vec{\boldsymbol{r}}),\quad \nabla\times\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=0. \tag{1.56}$$

1.6 Helmholtz 定理

若已知矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 的散度 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$ 和旋度 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}$，则矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 唯一确定，且可以表示为

$$\vec{\boldsymbol{F}}=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\mathrm{d}V'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\right)+\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\mathrm{d}V'\,\frac{\nabla'\times\vec{\boldsymbol{F}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\right). \tag{1.57}$$

1.7 选做练习

1. 证明恒等式

$$(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \times \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{2} B^2 \overleftrightarrow{I} \right) - (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\vec{\boldsymbol{B}}. \tag{1.58}$$

2. 证明恒等式

$$\vec{\boldsymbol{r}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) \times \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \cdot [(\vec{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{B}} - B^2 \overleftrightarrow{I}/2) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}] + B^2/2, \tag{1.59}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 为位置矢量，$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$.

3. 设电荷是局域分布的（为什么?），试由

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \text{ where } \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}' \tag{1.60}$$

证明：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0. \tag{1.61}$$

4. (a). 已知

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}, \quad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{x}}, \tag{1.62}$$

验证：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 是均匀静电场 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 的标量势，而 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 是均匀静磁场 $\vec{\boldsymbol{B}}$ 的矢量势.

(b). 由 $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{\boldsymbol{A}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$ 直接计算证明，任意电磁场的电磁势可以取为如下形式：

$$\varphi(t, \vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \int_0^1 \vec{\boldsymbol{E}}(t, \lambda\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\lambda \,, \quad \vec{\boldsymbol{A}} = -\int_0^1 \lambda\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \lambda\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\lambda \,. \tag{1.63}$$

注 可以先证明对于任意矢量场 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}}(\lambda\vec{\boldsymbol{r}})}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla)\vec{\boldsymbol{F}}(\lambda\vec{\boldsymbol{r}}). \tag{1.64}$$

2 作业选讲

1. (11.5.2 (3)) 求引力场 $\vec{\boldsymbol{F}} = -km\vec{\boldsymbol{r}}/r^3$ 通过光滑闭曲面 Σ 外侧的通量，其中质点 m 在 Σ 上.
2. (11.5.3) 设区域 V 是由曲面 $x^2+y^2-z^2/2=1$ 及平面 $z=1$, $z=-1$ 围成的，S 为 V 的全表面外侧. 又设 $\vec{\boldsymbol{v}} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，求积分 $\iint_S \vec{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$.
3. (Ch11.5) 设 $S(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分，且

$$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2). \tag{2.1}$$

   求证：当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2. \tag{2.2}$$

4. (Ch11.6) 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续，证明：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{2.3}$$

3 教材习题

1. (Ch11.4) （Poisson 公式）设 $S: x^2+y^2+z^2=1$，$f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，求证：

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{3.1}$$

   解 考虑从 (x,y,z) 到 (u,v,w) 的线性正交变换，其中 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}u = ax+by+cz$，那么 $u^2+v^2+w^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$. 在 $Ouvw$ 系中取 u 为 z 轴，作球坐标变换可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &= \int_0^{\pi} f\left(\cos\theta\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\cdot 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &\xlongequal{t=\cos\theta} 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{RHS}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

2. (Ch11.8) 设 $f(x,y)$ 在 $\bar{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{3.3}$$

   求证：对 $0\leqslant r\leqslant R$，有 $f(P_0) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$，其中 $P_0=(x_0,y_0)$，L 是以 P_0 为圆心、r 为半径的圆.

   证明. 参考 Ch11.10 的证法.

3. (Ch11.9) 设 D 是平面上光滑闭曲线 L 所围成的区域，$f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{3.4}$$

   求证：若 $f(x,y)$ 不是常数，则它在 $\bar{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

证明. 采用反证法. 若 $f(x,y)$ 的最大值 M 在 D 内某点 P_0 取到，则由 Ch11.8 的结论，

$$M = f(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_L f(P)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi r}\int_L M\,\mathrm{d}s = M, \tag{3.5}$$

等号成立当且仅当对于 $\forall P \in L$，均有 $f(P) \equiv M$. 由于 r 可以任意取到，因此在点 P_0 的任意邻域 $U(P_0,\varepsilon)$ 内，均有 $f(P) \equiv M$. 类似地，对 $\partial U(P_0,\varepsilon)$ 上的任一点 P，在其任意邻域 $U(P,\varepsilon')$ 内也有 $f(P) \equiv M$. 依此类推，可证明在整个 D 上均有 $f(P) \equiv M$，这与 f 不是常数矛盾，因此假设不成立，f 的最大值只能在 L 上取到. 最小值类似可证.

4. (Ch11.10) 设 $f(x,y,z)$ 在 $\bar{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数且满足

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{3.6}$$

求证：对 $0 \leqslant r \leqslant R$，有 $f(P_0) = \dfrac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$，其中 $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$，S 是以 P_0 为球心、r 为半径的球面.

证明. 记球面上一点 $P = (x,y,z)$，则 $\overrightarrow{P_0P} \xlongequal{\Delta} \vec{\boldsymbol{r}} = r\hat{\boldsymbol{r}}$，因此 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f$. 记 $B(r)$ 为以 P_0 为球心、半径为 r 的球域，那么

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}S &= \iint_S \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}S = \iiint_{B(r)} \nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \xlongequal{\text{Gauss}} \iiint_{B(r)} \nabla^2 f\,\mathrm{d}V = 0\\ &= \iint_{\partial B(r)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}S = r^2\iint_{\partial B(1)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}S = r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iint_{\partial B(1)} f\,\mathrm{d}S\,,\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此

$$4\pi f(P_0) = \iint_{\partial B(1)} f(P_0)\,\mathrm{d}S = \iint_{\partial B(1)} f(P)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{r^2}\iint_{\partial B(r)} f(P)\,\mathrm{d}S\,, \tag{3.8}$$

整理得 $f(P_0) = \dfrac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(P)\,\mathrm{d}S$，结论得证.

4 真题集萃

1. (17-18 期末 T_7) 设曲面

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1,z>0\},\tag{4.1}$$

它的定向与 z 轴正向同侧，设

$$f(x,y)=\frac{1+z}{1+x^2+y^2},\quad g(x,y)=xy+yz+zx.\tag{4.2}$$

求积分 $\iint_S\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$.

解 注意到

$$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=\nabla g\cdot(\nabla\times\nabla f)-\nabla f\cdot(\nabla\times\nabla g)=0,\tag{4.3}$$

构造 xOy 平面上的有向曲面 $D:x^2+y^2\leqslant1$，其方向沿 $+z$ 方向，因此 $S+D^-$ 构成法向向外的闭曲面，其中 D^- 为与 D 区域相同但方向相反的有向曲面. 由 Gauss 定理，

$$\iint_{S+D^-}\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=0\quad\Longrightarrow\quad\iint_S\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\iint_D\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}.\tag{4.4}$$

由题意，

$$\nabla f=\frac{-2(1+z)(x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}})}{(1+x^2+y^2)^2}+\frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{1+x^2+y^2},\tag{4.5}$$

$$\nabla g=(y+z)\hat{\boldsymbol{x}}+(z+x)\hat{\boldsymbol{y}}+(x+y)\hat{\boldsymbol{z}},\tag{4.6}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_D\frac{(-2x,-2y,1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\times(y,x,x+y)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_D\frac{x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

其中最后一步利用了被积函数与积分区域 D 中 x,y 的交换对称性.

2. (18-19 期末 T_4) 设

$$\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{y^2+z^2}{r^3}\hat{\boldsymbol{i}}-\frac{xy}{r^3}\hat{\boldsymbol{j}}-\frac{xz}{r^3}\hat{\boldsymbol{k}}\tag{4.8}$$

是定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上的向量场，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a). 证明：$\vec{\boldsymbol{v}}$ 的旋度 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}=0$.

(b). 求向量场 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 的势函数.

解 (a). 由题意，

$$\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{x}{r^3}(x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}}{r}-\frac{x\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}.\tag{4.9}$$

由 Leibniz 法则，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}=-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\times\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{r\hat{\boldsymbol{x}}-3x\hat{\boldsymbol{r}}}{r^4}\times\vec{\boldsymbol{r}}-0=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}-\frac{\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=0.\tag{4.10}$$

(b). 记势函数为 $\varphi(x,y,z)$，则

$$\varphi(x,y,z)=\int_L \vec{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=\int_L \frac{r\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}r}{r^2}=\int_L \mathrm{d}\Big(\frac{x}{r}\Big)=\frac{x}{r}+C. \tag{4.11}$$

3. (18-19 期末 T_5) 设向量场 $\vec{\boldsymbol{v}}=-x\hat{\boldsymbol{i}}+xy\hat{\boldsymbol{j}}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1/4}\hat{\boldsymbol{k}}$，曲面 $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$，它的正向是外法向. 求向量场 $\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}$ 在定向曲面 S 上的积分

$$\iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}\,. \tag{4.12}$$

解 注意到 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}})=0$，$S$ 为闭曲面，由 Gauss 定理，积分值为零.

4. (19-20 期末 T_{10}) 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{4.13}$$

计算

$$I=\iiint_\Omega \Big(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{4.14}$$

解 注意到被积函数是 $\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f$ 的形式，而题设条件仅给定 $\nabla^2 f$. 若希望两者的导数是同阶的，则将 $\nabla^2 f$ 配成 $\blacksquare\cdot\nabla^2 f$，其中 $\nabla^2 f$ 是 $\nabla\cdot\nabla f$ 的结果. 而 $2\vec{\boldsymbol{r}}$ 是 ∇r^2 的结果，因此由 Leibniz 法则，

$$\nabla\cdot(r^2\nabla f)=2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f+r^2\nabla^2 f=2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f+r^3. \tag{4.15}$$

由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2}\iint_{r=1} r^2\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}-\frac{1}{2}\iiint_\Omega r^3\,\mathrm{d}V\\ &=\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}-\frac{1}{2}\iiint_\Omega r^3\,\mathrm{d}V\\ &\xlongequal{\text{Gauss 定理}}\frac{1}{2}\iiint_\Omega (r-r^3)\,\mathrm{d}V=2\pi\int_0^1(r-r^3)r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

5. (20-21 期末 T_3 (2)) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D:x^2+y^2\leqslant\pi$ 上有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin\big(x^2+y^2\big), \tag{4.17}$$

$\vec{\boldsymbol{n}}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向，计算曲线积分 $\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s$.

解 记 ∂D 上某点 P 的法向 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则其正向切向

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=\Big(\cos\Big(\theta+\frac{\pi}{2}\Big),\sin\Big(\theta+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=-(\sin\theta,\cos\theta), \tag{4.18}$$

有向线元 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\vec{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$，即

$$\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}s\sin\theta,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}s\cos\theta, \tag{4.19}$$

那么

$$\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = (\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x). \tag{4.20}$$

由 Green 定理，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}}\,\mathrm{d}s &= \oint_{\partial D} \nabla u \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial D} (-u_y\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y) \\ &= \iint_D (u_{xx} + u_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r = \pi\left(-\cos r^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 2\pi.\end{aligned} \tag{4.21}$$

6. (20-21 期末 T_5) 记 $\vec{\boldsymbol{v}} = (y^2+z^2)\hat{\boldsymbol{i}} + (z^2+x^2)\hat{\boldsymbol{j}} + (x^2+y^2)\hat{\boldsymbol{k}}$，计算曲线积分

$$I = \oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,, \tag{4.22}$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2+y^2 = 2x$ 的交线 $(x \geqslant 0)$，从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

证明. 记球面上被 L 包围的区域为 Σ，由 Stokes 定理，

$$\begin{aligned}I &= \iint_S 2(y-z, z-x, x-y)\cdot\frac{(x-2, y, z)}{2}\,\mathrm{d}S = 2\iint_S (z-y)\,\mathrm{d}S = 2\iint_S z\,\mathrm{d}S \\ &= 2\iint_S z\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi,\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中第一行最后一个等号已利用 S 关于 y 坐标具有偶对称性的条件.

7. (21-22 期末 T_6) 设常数 a, b 都是正实数，平面向量场 $\vec{\boldsymbol{v}} = (-y\hat{\boldsymbol{i}} + x\hat{\boldsymbol{j}})/(a^2x^2+b^2y^2)$.
   (a). 求 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 在区域 $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>0\}$ 的所有势函数.
   (b). 证明 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 不是区域 $D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2>0\}$ 上的保守（有势）场.

解 (a). 对 $\forall D_0 \subset D_1$，由于 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 在 D_1 内无奇点，由 Green 定理，

$$\int_{\partial D_0} \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{\partial D_0} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{a^2x^2+b^2y^2} = 0, \tag{4.24}$$

因此 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 是保守场. 考虑折线段路径 $L_0: (1,0)\to(x,0)\to(x,y)$，积分得 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 的势函数

$$\varphi(x,y) = \varphi(1,0) + 0 + \int_0^y \frac{x\,\mathrm{d}v}{a^2x^2+b^2v^2} = \varphi(1,0) + \frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}. \tag{4.25}$$

(b). 取正向积分路径 $L: a^2x^2+b^2y^2 = 1$，则

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} &= \oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{a^2x^2+b^2y^2} = \oint_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{Green 定理}} 2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{ab}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

而对于 D_2 内任意不包含原点的区域 D_0，由第 (1) 问的结果，$\oint_{\partial D_0} \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = 0 \neq 2\pi/ab$. 因此 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 不是 D_2 内的保守场.

8. (21-22 期末 T_8) 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 有二阶连续偏导数，并且对任一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=f(P_0), \tag{4.27}$$

其中 S 是以 P_0 为球心、r 为半径的球面. 证明：f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0. \tag{4.28}$$

证明. 参考 Ch11.10 的证明思路. 记球面上一点 $P=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{P_0P}\xlongequal{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}=r\hat{\boldsymbol{r}}$，因此 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}r=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f$. 记 $B(r)$ 为以 P_0 为球心、半径为 r 的球域，那么

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{\partial f}{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}S&=\iint_S\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f\,\mathrm{d}S=\iiint_{B(r)}\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}\xlongequal{\text{Gauss}}\iiint_{B(r)}\nabla^2 f\,\mathrm{d}V\\&=\iint_{\partial B(r)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}S=r^2\iint_{\partial B(1)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}S=r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iint_{\partial B(1)}f\,\mathrm{d}S\\&=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B(r)}f\,\mathrm{d}S\right)=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}f(P_0)}{\mathrm{d}r}=0,\end{aligned} \tag{4.29}$$

整理得

$$\iiint_{B(r)}\nabla^2 f\,\mathrm{d}V=0,\quad\forall r>0. \tag{4.30}$$

由于 $\nabla^2 f\in C(\mathbb{R}^3)$，因此若 f 在某点 P' 非零，不妨设 $f(P')>0$，则 $\exists\varepsilon>0$，使得对 $\forall P\in U(P',\varepsilon)\subset B(r)\subset\mathbb{R}^3$，均有 $\nabla^2 f(P)>0$，因此

$$\iiint_{U(P',\varepsilon)}\nabla^2 f\,\mathrm{d}V>0. \tag{4.31}$$

这与以上结论矛盾，故要求对 $\forall P\in\mathbb{R}^3$，均有 $\nabla^2 f(P)=0$.

9. (22-23 期末 T_7) 设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围成的区域，$f(x,y)$ 在 D 上具有连续的偏导数. 记 $d=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}$.

(a). 证明：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_L xf(x,y)\,\mathrm{d}y-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{4.32}$$

(b). 对于 $\forall(x,y)\in L$, $f(x,y)=0$. 证明：

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant d^2\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma\,. \tag{4.33}$$

证明. (a). 由 Green 定理，

$$\int_L xf\,\mathrm{d}y=\iint_D[f+xf_x]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad\Longrightarrow\quad\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_L xf\,\mathrm{d}y-\iint_D xf_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{4.34}$$

(b). 分别取 $(P,Q)=(0,xf^2)$ 和 $(-yf^2,0)$，由 Green 定理，

$$\iint_D f^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_L xf^2\,\mathrm{d}y-\iint_D 2xff_x\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{4.35}$$

$$\iint_D f^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_L -yf^2\,\mathrm{d}x-\iint_D 2yff_y\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{4.36}$$

利用 L 上 $f\equiv 0$ 的条件可得

$$\begin{aligned}\iint_D f^2\,\mathrm{d}\sigma&=-\iint_D (xf_x+yf_y)f\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D (|xf_x|+|yf_y|)|f|\,\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{f_x^2+f_y^2}|f|\,\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\left[\iint_D (x^2+y^2)(f_x^2+f_y^2)\,\mathrm{d}\sigma\cdot\iint_D f^2\,\mathrm{d}\sigma\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{4.37}$$

其中后两个不等号均利用了 Cahchy-Schwarz 不等式，整理得

$$\iint_D f^2\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D (x^2+y^2)(f_x^2+f_y^2)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant d^2\iint_D (f_x^2+f_y^2)\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{4.38}$$