数学分析 B2 第十四次习题课

邓嘉驹

更新：June 24, 2025

目录

1 知识回顾 **2**

1.1 三角函数系与 Fourier 展开 2

1.2 余弦级数与正弦级数 2

1.3 Parseval 等式 3

1.4 广义 Fourier 级数 3

1.5 Fourier 变换 3

2 作业选讲 **4**

1 知识回顾

Fourier 分析这一章就考试而言相当简单，毕竟考察的内容均为暴力计算. 因此这一章的复习集中于习题训练，辅以小部分的技巧讲解.

1.1 三角函数系与 Fourier 展开

三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x, \cdots \tag{1.1}$$

构成 $I=[-\pi,\pi]$ 区间内一组正交基. 将任意实函数 $f(x)$ $(x\in I)$ 在三角函数系下展开，可得

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1.2}$$

其中 Fourier 系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots,), \tag{1.3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots,). \tag{1.4}$$

要判断其收敛性，可采用 Dirichlet 收敛定理：若 $f(x)$ 以 2π 为周期且在 I 上分段可微，则其 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & \text{连续点}, \\ [f(x-0)+f(x+0)]/2, & \text{间断点}. \end{cases} \tag{1.5}$$

为书写简便，答题时可在前几行列出不同间断点的收敛值，最后在连续点出写收敛到 $f(x)$，收敛点为“elsewhere”.

若区间为 $I(l)=[-l,l]$ $(l>0)$，则可选的函数基为 $\cos(n\pi x/l)$ 和 $\sin(n\pi x/l)$. 这是容易记忆的，因为可验证 $l=\pi$ 时回到上式，后续所有的 cos 和 sin 项进行替换即可.

1.2 余弦级数与正弦级数

通常计算余弦级数时为半区间 $[0,l]$，或者函数在区间 $[-l,l]$ 上为偶函数. 对于前者，需要说明将 $f(x)$ 在区间 $[-l,0)$ 上作偶（奇）延拓得到 $F(x)$（后续的周期延拓建议说明一下）. 对于余弦级数，

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\cdots),\quad b_n=0\ (n=1,2,\cdots). \tag{1.6}$$

对于正弦级数，

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\ \ (n=1,2,\cdots). \tag{1.7}$$

1.3 Parseval 等式

就应试而言，需要研究 Fourier 级数的函数均为平方可积的，不需要进一步判断，其形式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.8}$$

1.4 广义 Fourier 级数

了解 Fourier 级数来由后，任意关于广义 Fourier 级数的考察都能迎刃而解. 对于任一组定义在区间 A 上函数基 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，首先需要进行 Schmidt 正交化：

$$\psi_1(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|}, \tag{1.9}$$

$$\widetilde{\varphi}_n(x)=\varphi_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k(x)\left\langle\varphi_k(x),\varphi_n(x)\right\rangle, \tag{1.10}$$

$$\psi_n(x)=\frac{\widetilde{\varphi}_n(x)}{\|\widetilde{\varphi}_n(x)\|}\ (n\geqslant 2), \tag{1.11}$$

其中

$$\langle\varphi_k(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_A\varphi_k(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \|\widetilde{\varphi}_k(x)\|=\langle\widetilde{\varphi}_k(x),\widetilde{\varphi}_k(x)\rangle\,. \tag{1.12}$$

1.5 Fourier 变换

Fourier 变换近年都没有考察，但它在各领域均是被广泛使用的有力数学工具，因此加以了解是十分有必要的. 关于 Fourier 变换比较系统的知识会在数学物理方程课程中学习，这里先给出基本定义：

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{1.13}$$

关于 Fourier 变换容易证明的常用性质也列举如下：

1. 线性性：$F[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha F(\lambda)+\beta G(\lambda)$.
2. 频移：$F[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}]=F(\lambda-\lambda_0)$.
3. 微分关系：$F\left[f^{(n)}(x)\right]=(\mathrm{i}\lambda)^n F(\lambda)$.
4. 积分关系：$F\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}F(\lambda)$.
5. 卷积性质[1]：$F[f(x)*g(x)]=F(\lambda)G(\lambda)$.

   注 卷积：$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

[1]常用于反变换

2 作业选讲

1. (12.1.4) 已知函数的 Fourier 级数展开式，求常数 a 的值.

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=a(2a-|x|)$，其中 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

2. (12.2.2) 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数，a_n,b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 求证：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.