数学分析 B2 第十六次习题课

邓嘉驹

更新：June 24, 2025

目录

1 知识回顾 **2**

1.1 反常积分的敛散性判断 2

1.2 含参变量反常积分的敛散性判断 2

1.3 一致收敛含参变量反常积分的分析性质 3

1.4 内闭一致收敛与非一致收敛 3

1.5 Euler 积分 3

2 作业讲解 **5**

3 真题集萃 **6**

1 知识回顾

尽管这一章的内容常作为压轴题进行考察，但其解答套路基本没什么变化，这次我们简要作一个总结.

1.1 反常积分的敛散性判断

首先注意应优先判断函数 $f(x)$ 在积分的上限和下限是否分别为无穷点或奇点. 若两端均为无穷点或奇点，则任选区间中一连续点分割区间，分别研究两个反常积分的敛散性.

以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分为例（a 并非 $f(x)$ 的奇点），常用的判别法有以下几类：

1. 比较判别法：若 $|f(x)|<g(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$（绝对）收敛. 其渐进形式为：若 $f(x)\sim kg(x)\ (x\to+\infty)$ 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 当用到比较判别法时，最将被积函数与 p-级数进行比较：
$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\text{收敛} \iff p<1, \tag{1.1}$$
$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\text{收敛} \iff p>1. \tag{1.2}$$
2. Dirichlet 判别法：对于 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，若对于 $\forall b>a$，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界，且 $\exists b'\geqslant a$ 使得 $g(x)$ 在 $[b',+\infty)$ 内单调递减趋于零，则该广义积分收敛. 这一判别法常用于被积函数中含有 $\sin x,\cos x$ 的项，令 $f(x)=\sin x$ 即可.
3. Abel 判别法：对于 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\exists b\geqslant a$ 使得 $g(x)$ 在 $[b,+\infty)$ 内单调递减且有界，则该广义积分收敛. 这一判别法常用于以下两类情形：
   (1) 被积函数为 $\ln p_m(x)/p_n(x)$ 型，其中 $p_n(x)$ 为最高 n 次的多项式函数. 利用 $x\to+\infty$ 时 $x^\alpha\gg\ln p_m(x)\ (\forall\alpha>0)$ 的结论，选取合适的 α（常用 $\alpha=1/2$），构造 $g(x)=\ln p_m(x)/x^\alpha$ 证明其在 x 充分大时单调有界即可.
   (2) 被积函数含常用广义积分，如 Dirichlet 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，此时可构造 $f(x)=\sin x/x$，剩余项为 $g(x)$.

1.2 含参变量反常积分的敛散性判断

含参变量的常义积分中，二元被积函数的连续性往往是显然的，因此基本不作为考察对象. 对于含参变量的反常积分，常有以下三种一致收敛性判别法：

1. Weierstrass 判别法：对于 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$，$u\in[\alpha,\beta]$，若 $|f(x,u)|\leqslant g(x)$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 成立且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则该反常积分一致收敛，$g(x)$ 称为 $f(x,u)$ 的控制函数. 这一判别法是最常用的判别法，往往使用不等式放缩就容易判断其敛散性.

2. Dirichlet 判别法：对于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$，若对于 $\forall b > a$，$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $u \in [\alpha,\beta]$ 上一致有界，且 $\exists b' \geqslant a$ 使得 $g(x,u)$ 在 $x \in [b',+\infty)$ 内单调递减且一致趋于零，则该广义积分一致收敛.
3. Abel 判别法：对于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$，若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $u \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛，且 $\exists b \geqslant a$ 使得 $g(x,u)$ 在 $[b,+\infty)$ 内单调递减且一致有界，则该广义积分一致收敛.

1.3 一致收敛含参变量反常积分的分析性质

若 $F(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则有

1. 连续性：$F(u_0) = \lim\limits_{u\to u_0} F(u)$，即

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x,u_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.3}$$

2. 可积性：对于 $\forall[\alpha_0,\beta_0] \subset [\alpha,\beta]$，有

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x,u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{1.4}$$

3. 可微性：若 $\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$ 在 (α,β) 上收敛（不要求一致收敛），则 $F(u)$ 可微，且

$$F'(u) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.5}$$

1.4 内闭一致收敛与非一致收敛

有些含参变量的返厂积分在特定区间上并不一致收敛，如 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛，但在 $\forall[\varepsilon,+\infty) \subset (0,+\infty)$ 内一致收敛. 但事实上，连续性和可微性为局域性质，实际上并不需要通过证明含参变量的反常积分一致收敛以证明这些性质. 因此，对于区域内的任意参数取值，证明存在其一致收敛的区域再运用分析性质即可，即引入内闭一致收敛是有必要的. 例如若被积函数的分子含有 $\ln(1+tx)$ 项，对 $\forall t$，可证明其在 $[0,T]$ 内一致收敛.

1.5 Euler 积分

两类 Euler 积分分别为

1. Γ 函数：$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$，其收敛域为 $(0,+\infty)$.
2. B 函数：

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^p - 1(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,\mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{1.6}$$

三种形式均需要记忆.

常用的相关公式有

1. $\mathrm{B}(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$.
2. 余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x\ (0<x<1)$.

2 作业讲解

1. (13.1.1) 判断下列反常积分的收敛性：

   (7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}$.

   解 由比较判别法的极限形式，当 $x\to 0^+$ 时，$\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x}$，而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2$ 收敛，故原反常积分收敛.

   (10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

   解 这里给出两种方法：

   I. 先进行分部积分，可得

   $$\text{原式}=2\sqrt{x}\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=-2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,,\tag{2.1}$$

   (14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\mu}}\,\mathrm{d}x$.

2. (13.3.4) 应用对参数进行微分或积分的方法，计算下列积分：

   (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$.

3. (13.4.8) 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 及 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算：

   (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x\ (\sigma>0)$.

4. (13.5.3) 利用 Euler 积分计算：

   (6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\tan^2\alpha x\,\mathrm{d}x\ (|\alpha|<1)$.

5. 计算极限

   $$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{3/2}(1-x^5)^{\alpha}\,\mathrm{d}x\,.\tag{2.2}$$

6. 设 $a>0$，试求由曲线 $x^n+y^n=a^n$ 和两坐标轴所围成的平面图形在第一象限的面积.

3 真题集萃

1. (23-24 期末 T_2) 设 $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $t>0$.

   (1) 求证：对于任何的 $T>0$，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,T]$ 上一致收敛.

   (2) 求证：对任意的 $t>0$，有

   $$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{\pi}{2}\ln t. \tag{3.1}$$

2. (22-23 期末 T_1 (3)) 求极限：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

3. (22-23 期末 T_6) 设

   $$\varphi(t)=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+tx)}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\quad(t\geqslant 0). \tag{3.2}$$

   (1) 证明：$\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

   (2) 计算 $\varphi(1)$ 的值.

4. (18-19 期末 T_8) 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，求证：

   (1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

   (2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

   (3) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程

   $$F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}. \tag{3.3}$$

5. (17-18 期末 T_8) 设 $|\alpha|\neq 1$. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，并求其值.

6. (12-13 期末 T_6) 求证：$f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上有二阶连续导数且满足微分方程

   $$f''(x)+f(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \tag{3.4}$$